

D I F F E R E N T I A L O P E R A T O R E N
A U F
D I F F E R E N Z I E R B A R E N R Ä U M E N

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Fakultät für Mathematik
der Ruhr-Universität Bochum

vorgelegt von
KLAUS PETER MEIER

Bochum 1983



1. Gutachter: Prof. Dr. K.-H. Spallek

2. Gutachter: Prof. Dr. G. Wassermann

Mündliche Prüfung: Juni 1983

Vorwort :

In dieser Arbeit werden Differentialoperatoren auf differenzierbaren Räumen betrachtet.

Neben dem formalen Aspekt, sich mit differenzierbaren Räumen als sinnvoller Verallgemeinerung von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten zu beschäftigen, spielt dabei auch die „Philosophie“ eine Rolle, daß man die in unserer Welt ($\approx$ Mannigfaltigkeit) „real existierenden Phänomene“ als diejenigen beschreiben kann, die invariant unter gewissen Gruppenoperationen sind.

Wie aber die Ergebnisse von Cartan/Jung im komplexen und von Reichard in [14] im reellanalytischen bzw. beliebig oft differenzierbaren Fall zeigen, besitzt der Quotient einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit nach eigentlich-diskontinuierlichen Gruppen im allgemeinen keine Mannigfaltigkeitsstruktur, sondern die eines differenzierbaren Raums.

Dabei sollten die richtig definierten gruppeninvarianten Differentialoperatoren (die von Kantor in [7] definierten sind zu speziell !) genau die auf dem Bahnraum existierenden sein.

Die hier behandelte Theorie der linearen Differentialoperatoren auf Singularitätenmengen begann im Jahre 1967, als Grothendieck in [5] auf komplexanalytischen Räumen eine erste Definition und einige einfache Folgerungen formulierte.

Malgrange griff in [8] diese Ideen auf und stellte dabei eine für die Entwicklung der hier behandelten Theorie entscheidende Frage :

„Für welche Räume ist die Menge der Differentialoperatoren beliebiger Ordnung endlich erzeugt (in dem im fünften Paragraphen definierten Sinne) ?“

Diese Frage ist in aller Allgemeinheit bis heute ungelöst, doch existieren einige Arbeiten, die diese Frage in Spezialfällen behandeln.

So konnten Kantor 1971 in [7] für normale komplexanalytische Räume, die Quotient des $\mathbb{C}^n$ unter einer endlichen Gruppe von Automorphismen sind, und Bloom und Vigüé 1972/73 in [2] bzw. in [19] unabhängig voneinander für eindimensionale irreduzible komplexanalytische Räume die „Malgrangsche Frage“ positiv beantworten.

Die Hauptidee, die allen diesen Arbeiten zugrunde liegt, ist die Tatsache, daß bei den oben erwähnten Spezialfällen die Graduierung der Differentialoperatoren (siehe § 5) eine endlich erzeugte Algebra ist, und man, anstatt

direkt die Menge der Differentialoperatoren beliebiger Ordnung zu untersuchen, die Graduierung auf endliche Erzeugtheit untersucht. Wie Vigué aber schon im zweiten Teil von [19] anhand von Beispielen feststellt, kann es durchaus vorkommen, daß, obwohl die Graduierung nicht endlich erzeugt ist, dennoch die Malgrangsche Frage positiv beantwortet werden kann. Da die Eigenschaft der endlichen Erzeugtheit der Graduierung schon bei sehr einfachen Mengen nicht erfüllt ist, muß man andere Methoden benutzen, um in diesen Fällen Aussagen über die endliche Erzeugtheit der Differentialoperatoren machen zu können.

Überraschung löste 1973 die Arbeit von Bernstein/Gelfand/Gelfand aus, die auf dem kubischen komplexen Kegel in [1] zeigten, daß die Menge der Differentialoperatoren beliebiger Ordnung nicht endlich erzeugt ist. Damit ging auch die insgeheim noch gehegte Hoffnung verloren, wenigstens auf algebraischen Mengen die Malgrangsche Frage positiv beantworten zu können. Vigué, der sich nach dem Erscheinen des Gegenbeispiels von Bernstein/Gelfand/Gelfand intensiv mit zweidimensionalen normalen Kegeln beschäftigte, konnte 1975 in [20] eine topologische Eigenschaft angeben, wann auf diesen Kegeln die Menge der Differentialoperatoren endlich erzeugt ist oder nicht.

In dieser Arbeit werden nicht nur, wie bisher meistens in der Literatur, Differentialoperatoren auf reduzierten komplexen, sondern allgemeiner auf differenzierbaren Räumen (siehe [15]) definiert und behandelt. Dabei ist Wert darauf gelegt worden, die typische in der Analysis bekannte Definition von Differentialoperatoren auf offenen Mengen, die sich erst einmal von den algebraischen Begriffsbildungen unterscheidet, durch Verallgemeinerung einer Idee von Peetre in [13], angeregt durch die Arbeit von Spallek ([16]), auf differenzierbare Räume zu übertragen.

Dabei ergibt sich im Spezialfall des komplexen Raums, auf dem Grothendieck, Malgrange, Bloom und Vigué ausschließlich Differentialoperatoren betrachten, aufgrund eines Satzes von Spallek in [17] die Äquivalenz ihrer Definitionen mit der in dieser Arbeit verwendeten Begriffsbildung, die also die „richtige Verallgemeinerung“ des Begriffs Differentialoperator darstellt.

Um später die Untersuchungen der „algebraischen Fragen“ durchführen zu können, werden wir im zweiten Paragraphen die Lösungssätze für Differentialoperatoren auf differenzierbaren Räumen beweisen. Dabei muß allerdings be-

achtet werden, daß diese Eigenschaft nur für (t) -reguläre differenzierbare Räume (siehe Definition (2.6)) richtig ist, wobei man allerdings sagen muß, daß diese Bedingung von allen komplexen, reduzierten und einer sehr großen Anzahl von nicht reduzierten differenzierbaren Räumen erfüllt wird. Im folgenden werden wir die Betrachtung auf (t) -reguläre differenzierbare Räume beschränken.

Durch die bisher von Bloom, Vigüé und Kantor durchgeführten Untersuchungen und Beispiel angeregt, wurde zuerst das folgende vermutet :

- (1) Die Moduln der Differentialoperatoren der Ordnung kleiner gleich k sind nicht nur für reell- und komplexanalytische, sondern auch für beliebig oft differenzierbare Strukturen endlich erzeugt, oder, falls dies nicht richtig sein sollte, wenigstens für alle k einheitlich endlich oder nicht endlich erzeugt !
- (2) Die Endlichkeit der oben erwähnten Moduln ist eine notwendige Voraussetzung für die positive Beantwortung der „Malgrangschen Frage“ !
- (3) Man kann eine geometrische Bedingung angeben, die bei „geometrisch einfachen Singularitätenmengen“ für eine positive, bei „geometrisch komplizierteren Singularitätenmengen“ für eine negative Beantwortung der „Malgrangschen Frage“ sorgt !

Leider zeigen die Untersuchungen in dieser Arbeit, daß alle diese Vermutungen nicht richtig sind.

So wird im dritten Paragraphen zwar gezeigt, daß der oben erwähnte Modul im komplex- und reellanalytischen Fall und bei beliebig oft differenzierbaren Räumen, die von reellanalytischem endlichen Typ (siehe Definition (3,16)) sind, immer endlich erzeugt ist, aber es werden auch gleichzeitig Beispiele angegeben, die die Vermutung (1) vollständig widerlegen.

Im vierten Abschnitt wird in den Spezialfällen der verallgemeinerten „Neillschen Parabel“ ($x^p = y^q$) und der „Cartanschen Umbrella“ eine Abschätzung für das minimale Erzeugendensystem des im dritten Paragraphen untersuchten Moduls angegeben. Dabei wird allerdings nicht, wie bisher üblich, mit Hilfe der Parametrisierung der Mengen, sondern mit Methoden der Analysis und der Potenzreihen durch direkte Betrachtung der Liftungen klassifiziert.

Im fünften Paragraphen untersuchen wir die „Malgrangsche Frage“ für differenzierbare Räume, die Vereinigung zweier eindimensionaler Mannigfaltigkeiten, versehen mit der reduzierten Struktur, insbesondere also reduzibel, sind. Dabei werden die hier behandelten verschiedenen Fälle nach dem Differentialgleichungsverhalten der Parametrisierung f der Mannigfaltigkeiten (d.h. nach dem Aussehen von P_1, P_2 , für die $P_1 f' = P_2 f'$ ist) unterschieden. Wie im vierten Paragraphen klassifizieren wir auch hier wieder mit Methoden der Analysis und der Potenzreihen durch Betrachtung geeigneter Liftungen.

Dabei werden wir zwar unter den hier betrachteten Fällen bis auf einige Klassen die endliche Erzeugtheit der Differentialoperatoren beliebiger Ordnung nachweisen, gleichzeitig aber auch die Vermutungen (2), (3) widerlegen. So wird eine Klasse differenzierbarer Räume angegeben, für die die im dritten Abschnitt untersuchten Moduln nicht endlich, die Differentialoperatoren beliebiger Ordnung dagegen endlich erzeugt sind. Ferner zeigen wir, daß bei flacher Annäherung der beiden Mannigfaltigkeiten im Nullpunkt durchaus der Fall eintreten kann, daß die Malgrangsche Frage in einer Situation negativ, dagegen in einem flacheren und einem weniger flachen -sprich in einem geometrisch-komplizierteren bzw. geometrisch-leichterem - Fall positiv beantwortet werden kann.

Ferner zeigen die Beispiele auch, daß Induktionsbeweise bei Whitney-stratifizierbaren Räumen über die Strata in der Operatortheorie nicht, wie ursprünglich erhofft, zum Ziel führen.

Im letzten Paragraphen werden schließlich einige Aspekte zu Differentialoperatorgleichungen formuliert, die Anregung und Motivation für die weitere Beschäftigung mit Differentialoperatoren darstellen soll.

An dieser Stelle sei ebenfalls erwähnt, daß, um diese Arbeit nicht über alle Gebühr aufzublähen, die Detailrechnung der einzelnen Beispiele dem Leser überlassen bleibt, wobei allerdings an den entscheidenden Punkten Ideenskizzen und Hinweise gegeben wurden.

Herzlich danken möchte ich meinem Lehrer, Herrn Prof. Dr. K.-H. Spallek für seine zahlreichen Anregungen und Ratschläge.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
§ 1 Einführende Definitionen	6
§ 2 Liftung von Differentialoperatoren	12
§ 3 Untersuchung des $C^N(X, x)$ -Moduls $\text{DIFF}_x^k(\mathbb{X}, N)$ auf endliche Erzeugtheit	28
§ 4 Abschätzung der Minimalanzahl der Erzeugenden von $\text{DIFF}_x^k(\mathbb{X}, N)$ in Spezialfällen	44
§ 5 Untersuchung von $\text{DIFF}_x(\mathbb{X}, N)$ auf der Vereinigung zweier eindimensionaler N -differenzierbarer Mannig- faltigkeiten	64
§ 6 Einige Aspekte zur Lösung von Differentialoperator- gleichungen	98
Literaturverzeichnis	112

§ 1 Einführende Definitionen

In diesem Paragraphen sollen die für die Arbeit benötigten Begriffe und Aussagen aus der Theorie der differenzierbaren Räume und der Differentialoperatoren zusammengestellt werden. Soweit diese Aussagen aus den grundlegenden Arbeiten [10], [14] und [15] bekannt sind, ist auf Beweise und genaue Literaturangaben verzichtet worden.

Zunächst einige Verabredungen :

$\mathbb{K}$ bezeichne simultan $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Für $N \in \{\infty, \omega, \omega^*\}$ sei $\mathcal{D}^N(\mathbb{K}^n)$ die Garbe der $\mathbb{K}$ -wertigen C^N -Funktionskeime auf dem $\mathbb{K}^n$. Dabei bedeute C^N im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ für $N = \infty$ „unendlich oft mal stetig differenzierbar“, für $N = \omega$ „reellanalytisch“ und im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ für $N = \omega^*$ „komplexanalytisch“.

Da in dieser Arbeit Differentialoperatoren auf „differenzierbaren Räumen“ betrachtet werden sollen, stellen wir an dieser Stelle die grundlegenden Begriffe über differenzierbare Räume zusammen.

Definition 1.1.: Ein Paar $(X, \mathcal{G})$ heißt geringter Raum $\mathbb{X}$, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind :

- (1) X ist ein topologischer Raum
- (2) $\mathcal{G}$ ist eine Garbe von $\mathbb{K}$ -Algebren mit 1 auf X
- (3) $\mathcal{G}_x$ hat genau ein maximales Ideal $\tilde{m}_x \subsetneq \mathcal{G}_x \quad \forall x \in X$
- (4) Die natürliche Abbildung

$$\begin{aligned} i_x : \mathbb{K} &\rightarrow \mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{G}_x / \tilde{m}_x & \text{mit} \\ c &\rightarrow c \cdot 1_x \rightarrow [c \cdot 1_x] \end{aligned}$$

ist $\forall x \in X$ eine Isomorphie.

Definition 1.2.: Ein N -differenzierbarer Raum $\mathbb{X}$ im $\mathbb{K}^n$ ist ein geringter Raum $\mathbb{X} = (\underline{X}, \underline{\mathcal{G}}) := (X, (\mathcal{D}^N(\mathbb{K}^n)|_X)/I)$ mit

- (1) $X \subset \mathbb{K}^n$ beliebig
- (2) I ist eine Idealuntergarbe mit $I_x \neq \mathcal{D}_x^N \quad \forall x \in X$.

Definition 1.3.: Ein ω^* -differenzierbarer Raum $\mathbb{X} = (X, (\mathcal{D}^{\omega^*}(\mathbb{C}^n)|X)/I)$ heißt komplexer Raum, falls I eine in einer Umgebung $U(X) \subset \mathbb{C}^n$ gegebene kohärente Idealuntergarbe von $\mathcal{D}^{\omega^*}(\mathbb{C}^n)|U$ ist, wobei zusätzlich $X = \{x \in U \mid I_x \neq D_x\}$ sein muß.

Definition 1.4.: Für $T \subset \mathbb{K}^n$ beliebig sei $N(T) \subset \mathcal{D}^N(\mathbb{K}^n)$ die Idealuntergarbe der auf T verschwindenden $\mathbb{C}^N$ -Funktionskeime.
Ein N -differenzierbarer Raum $\mathbb{X} = (X, (\mathcal{D}^N(\mathbb{K}^n)|X)/I)$ im $\mathbb{K}^n$ heißt reduzierter Raum, falls $I = N(X)|X$ ist.

Bisher wurden in der Literatur meist Differentialoperatoren auf speziellen reduzierten komplexen Räumen betrachtet.

Vereinbarung: Ist bei Betrachtungen in den folgenden Paragraphen über eine Teilmenge $X \subset \mathbb{K}^n$ nicht explizit aufgeführt, mit welcher Raumstruktur diese versehen sein soll, so werden wir sie immer als reduzierten N -differenzierbaren Raum auffassen !

Definition 1.5.: Sei $\mathbb{X} = (X, \underline{X}) := (X, (\mathcal{D}^N(\mathbb{K}^n)|X)/I)$ ein N -differenzierbarer Raum im $\mathbb{K}^n$ und $T \subset X$ eine beliebige Teilmenge.

Dann bezeichnet man

(a) eine stetige Abbildung $\sigma : T \rightarrow \underline{X}$ mit

$$t \mapsto f_t, \quad f_t \in \mathcal{D}_t^N(\mathbb{K}^n)/I_t$$

als einen Schnitt von $\underline{X}$ über T .

(b) die Menge $\text{Tr}(\sigma) := \{x \in T \mid \sigma(x) \neq 0_x = \text{Nullelement in } \underline{X}_x\}$ als Träger von σ über T .

$\Gamma(T, \underline{X}) := \{ \sigma \mid \sigma \text{ ist Schnitt von } \underline{X} \text{ über } T \}$

Bemerkung 1.6.: Ist $\mathbb{X} = (X, (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)|X)/I)$ ein reduzierter ∞ -differenzierbarer Raum, so entsprechen die Schnitte $\Gamma(X, \underline{X})$ genau den unendlich oft mal stetig differenzierbaren Funktionen $\mathcal{C}^\infty(X)$ auf X .

Vereinbarung: Ist $\mathbb{X} = (X, (\mathcal{D}^N(\mathbb{K}^n)|X)/I)$ ein N -differenzierbarer Raum, so werden wir im folgenden die Keime $\mathcal{D}_t^N(\mathbb{K}^n)/I_t$, $t \in X$ auch oft mit $\mathbb{C}^N(x, t)$ bezeichnen, um den Abbildungscharakter zu betonen.

Kommen wir nun zur Definition von Differentialoperatoren auf differenzierbaren Räumen.

Dabei ist besonderen Wert auf die Tatsache gelegt worden, durch die Darstellung aufzuzeigen, daß die in dieser Arbeit verwandte Definition von Differentialoperator sich kanonisch aus der in [10] benutzten Definition auf reduzierten ∞ -differenzierbaren Räumen ergibt. Die dort benutzte Begriffsbildung stellt eine Verallgemeinerung einer Idee von Peetre in [13] dar.

Zuerst werden hier in Analogie zu [10] Differentialoperatoren auf ∞ -differenzierbaren Räumen definieren.

Definition 1.7.: Sei $\mathbb{X} = (\underline{X}, \underline{X}) := (X, (D^\infty(\mathbb{R}^n)|X)/I)$ ein beliebiger ∞ -differenzierbarer Raum im $\mathbb{R}^n$.

Dann bezeichnet man ein $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$\tilde{D} : \Gamma(\underline{X}, \underline{X}) \rightarrow \Gamma(\underline{X}, \underline{X})$$

als einen linearen ∞ -Differentialoperator vom Grad k über $X \subset \mathbb{R}^n$, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind :

- (1) $\text{Tr}(D f) \subset \text{Tr}(f) \quad \forall f \in \Gamma(\underline{X}, \underline{X})$
- (2) Ist $f \in \Gamma(\underline{X}, \underline{X})$, $x \in X$ beliebig und gilt $f(x) \in \tilde{m}_x^{n+k}$ für $k \in \mathbb{N}_0$, so muß $(\tilde{D} f)(x) \in \tilde{m}_x^n$ sein .

Für viele Anwendungen ist es wichtig, diesen Differentialoperator eindeutig auf offene Teilmengen $U \subset X$ einschränken zu können. Das dies immer möglich ist, zeigt die folgende

Bemerkung 1.8.: Sei $\mathbb{X} = (\underline{X}, \underline{X})$ ein ∞ -differenzierbarer Raum im $\mathbb{R}^n$ und sei $\tilde{D} : \Gamma(\underline{X}, \underline{X}) \rightarrow \Gamma(\underline{X}, \underline{X})$ ein linearer ∞ -Differentialoperator vom Grad k über $X \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt :

$\forall U \subset_{\text{offen}} X \quad \exists!$ linearer ∞ -Differentialoperator

$$\tilde{D}_U : \Gamma(U, \underline{X}) \rightarrow \Gamma(U, \underline{X}) ,$$

Einschränkung von $\tilde{D}$ auf U genannt, so daß

$$(\tilde{D} f)(x) = (\tilde{D}_U f|_U)(x) \quad \forall x \in U, \forall f \in \Gamma(\underline{X}, \underline{X}) \quad \text{ist.}$$

Beweis: In Analogie zu Bemerkung (2.3) von [10] unter Ausnutzung der Trägereigenschaft durch Konstruktionen mittels der C^∞ -Hutfunktionen. $\square$

Wie die folgende Bemerkung zeigt, kann man diese Eigenschaft auch etwas eleganter formulieren.

Bemerkung 1.9.: Ist $\mathbb{X} = (\underline{X}, \underline{X})$ ein ∞ -differenzierbarer Raum im $\mathbb{R}^n$, so gilt:

$\tilde{D} : \Gamma(\underline{X}, \underline{X}) \rightarrow \Gamma(\underline{X}, \underline{X})$ ist ein linearer ∞ -Differentialoperator vom Grad k über $X \subset \mathbb{R}^n$,

$$\iff (1) \tilde{D} : \underline{X} \rightarrow \underline{X} \text{ ist ein } \mathbb{R}\text{-Garbenhomomorphismus}$$

$$(2) \tilde{D}_X(\tilde{m}_X^{k+n}) \subset \tilde{m}_X^n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \forall x \in X$$

Mit Hilfe der nun in Bemerkung (1.9) hergeleiteten Charakterisierung von Differentialoperatoren werden wir nun diesen Begriff in kanonischer Weise auf N -differenzierbare Räume verallgemeinern, wobei $N \in \{\infty, \omega, \omega^*\}$ zu wählen ist.

Hauptdefinition 1.10.: (Differentialoperator auf N -differenzierbaren R .)

(a) Sei für $N \in \{\infty, \omega, \omega^*\}$ $\mathbb{X} = (\underline{X}, \underline{X}) := (X, (D^N(\mathbb{K}^n)|X)/I)$ ein beliebiger N -differenzierbarer Raum über $X \subset \mathbb{K}^n$.

Dann bezeichnet man eine Abbildung

$$\tilde{D} : \underline{X} \rightarrow \underline{X}$$

als einen linearen N -Differentialoperator vom Grade k über $X \subset \mathbb{K}^n$, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind :

(1) $\tilde{D}$ ist ein $\mathbb{K}$ -Garbenhomomorphismus

$$(2) \tilde{D}_X(\tilde{m}_X^{k+n}) \subset \tilde{m}_X^n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$$

(b) Im folgenden wird die zweite Bedingung unter (a) jeweils als Maximal-Ideal-Bedingung bezeichnet werden.

(c) Einen linearen N -Differentialoperator werden wir kurz N -DO nennen.

Definition 1.11.: Das minimalste $k \in \mathbb{N}_0$ in Hauptdefinition (1.10), für das D noch einen Differentialoperator k -ten Grades darstellt, heißt Ordnung des Differentialoperators.

Beispiel 1.12.: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$, versehen mit der reduzierten ∞ -differenzierbaren Raumstruktur, und sei $f \in C^\infty(X)$ beliebig gewählt.

Dann ist der Differentialoperator $\tilde{D} : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$, für den $\tilde{D}(g) := f \cdot g \quad \forall g \in C^\infty(X)$ ist, von der Ordnung 0 und von jedem beliebigen Grad $k \in \mathbb{N}_0$!

Wie wir im nächsten Paragraphen erkennen werden, stimmt diese hier benutzte Definition mit denen von Vigüé, Bloom und Kantor auf komplexanalytischen Räumen überein.

Um später besser mit N -Differentialoperatoren arbeiten zu können, werden an dieser Stelle einige Rechenregeln zusammengestellt.

Bemerkung 1.13.: Sei $\mathbb{X} = (X, \underline{X})$ ein beliebiger N -differenzierbarer Raum und $\tilde{D}_i : \underline{X} \rightarrow \underline{X}$ ein N -DO der Ordnung k_i über $X \subset \mathbb{K}^n$, $i = 1, 2$. Dann gilt:

- (1) $\tilde{D}_1$ ist ein N -DO (k_1+t) -ten Grades über $X \subset \mathbb{K}^n$ für alle $t \in \mathbb{N}$!
- (2) $(\tilde{D}_1 + \tilde{D}_2)$ ist ein N -DO der Ordnung $\max\{k_1, k_2\}$ über $X \subset \mathbb{K}^n$!
- (3) $\tilde{D}_1 \circ \tilde{D}_2$ ist ein N -DO der Ordnung (k_1+k_2) über $X \subset \mathbb{K}^n$!
- (4) Ist $f \in \Gamma(X, \underline{X})$, so ist $f \cdot \tilde{D}_1$ in kanonischer Weise ein N -DO des Grades k_1 über $X \subset \mathbb{K}^n$!

Bezeichnung 1.14.: Sei $\mathbb{X} = (X, \underline{X})$ ein beliebiger N -differenzierbarer Raum. Dann bezeichnen wir mit

- (1) $\text{DIFF}^k(\mathbb{X}, N)$ die Menge der N -DO k -ten Grades über $X \subset \mathbb{K}^n$!
- (2) $\text{DIFF}(\mathbb{X}, N)$ die Menge der N -DO beliebiger Ordnung über $X \subset \mathbb{K}^n$!

Da wir später nur noch Keime von N -DO in $x \in X$ betrachten wollen, bezeichnen wir mit

- (3) $\text{DIFF}_x^k(\mathbb{X}, N)$ die Menge von Keimen von N -DO k -ten Grades in $x \in X$!
- (4) $\text{DIFF}_x(\mathbb{X}, N)$ die Menge von Keimen von N -DO beliebigen Grades in $x \in X$!

Zum Schluß dieses Paragraphen wollen wir noch eine Bezeichnungsweise festlegen, die wir in den nächsten Paragraphen ständig benutzen werden.

Vereinbarung: (1) Befinden wir uns im $\mathbb{K}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}\}$,
so werden wir für die partiellen Ableitungen
$$\frac{\partial^{i_1 + i_2 + \dots + i_n}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}}$$
auch des öfteren die

Bezeichnung $D^{i_1, i_2, \dots, i_n}$ für $i_j \in \mathbb{N}_0$, $j=1, \dots, n$,
wählen.

(2) Für $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\beta := (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ist dann
 $D^\beta := D^{\beta_1, \dots, \beta_n}$!

§ 2 Liftung von Differentialoperatoren

Nachdem im ersten Paragraphen Differentialoperatoren auf differenzierbaren Räumen X formal definiert wurden, werden nun die für die "Klassifikation" von Differentialoperatoren entscheidenden Hilfsaussagen formuliert und bewiesen.

Dabei wird insbesondere gezeigt, daß sich jeder Differentialoperator auf X zu einem auf dem umgebenden Raum lokal fortsetzen, d.h. liften, läßt, falls die Idealuntergarbe I , mit deren Hilfe der differenzierbare Raum X definiert wird, nicht allzu "entartet" ist. Dabei ist besonders interessant, daß die Ordnung des gelifteten Operators bei nicht-reduzierten Räumen im allgemeinen größer als die des Ausgangsoperators auf X ist.

Ferner werden wir sehen, daß die in dieser Arbeit verwandte Definition von Differentialoperator mit denen von Malgrange in [8], Bloom in [2] und von Vigüé in [19], die diese auf analytischen Räumen benutzen, übereinstimmt.

Definition 2.1.: Sei $X := (\underline{X}, \underline{X})$ ein N -differenzierbarer Raum im $\mathbb{K}^n$ und $\tilde{D} : \underline{X} \rightarrow \underline{X}$ ein linearer N -DO vom Grad k über $X \subset \mathbb{K}^n$.

Dann heißt $\tilde{D}$ lokal um $x \in X$ liftable, falls eine offene Umgebung $U(x) \subset \mathbb{K}^n$ und darauf Funktionen $A_\alpha \in C^N(U(x))$ existieren, so daß der N -DO

$$D := \sum_{|\alpha| \leq s} A_\alpha \cdot D^\alpha : C^N(U(x)) \rightarrow C^N(U(x))$$

die folgende Bedingung erfüllt :

Mit $\tilde{U} := X \cap U$ kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C^N(U(x)) & \xrightarrow{D} & C^N(U(x)) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \Gamma(\tilde{U}, \underline{X}) & \xrightarrow{\tilde{D}} & \Gamma(\tilde{U}, \underline{X}) \end{array}, \text{ wobei}$$

$\forall f \in C^N(U(x)), \forall y \in \tilde{U}$ man $(\pi f)(y) := i_y \cdot f_y$ definiert und $i_y : D_y^N(\mathbb{K}^n) \rightarrow D_y^N(\mathbb{K}^n)/I_y$ die kanonische Projektion ist.

Die Abbildung D heißt dann lokale Liftung von $\tilde{D}$ um $x \in X$.

Definition 2.2.: Kann man in Definition (2.1) die Umgebung $U(x) \subset_{\text{offen}} \mathbb{K}^n$ so wählen, daß $X \subset U(x)$ ist, so heißt $\tilde{D}$ global liftbar und die Abbildung D eine globale Liftung von $\tilde{D}$.

Bemerkung 2.3.: Mit den Bezeichnungen von Definition (2.1), (2.2) gilt: Ist $N = \infty$ und $\tilde{D}$ für alle $x \in X$ lokal liftbar, so ist $\tilde{D}$ sogar global liftbar!

Beweis: Man „stückelt“ mit Hilfe einer Partition der Eins die lokalen Liftungen von $\tilde{D}$ zu einer globalen zusammen. □

Eine große Klasse von Differentialoperatoren, die sich alle global liften lassen, bekommt man durch Einschränkung von Differentialoperatoren über $U \subset_{\text{offen}} \mathbb{K}^n$, die eine gewisse Invarianzeigenschaft aufweisen, wie die folgende Bemerkung zeigt.

Bemerkung 2.4.: Sei $U \subset_{\text{offen}} \mathbb{K}^n$, $A_\alpha \in C^N(U)$ und sei

$$D := \sum_{|\alpha| \leq k} A_\alpha D^\alpha : C^N(U) \rightarrow C^N(U)$$

ein linearer N-DO vom Grade $k \in \mathbb{N}$ über U .

Ist $X \subset U$ und $\mathbb{X} = (\underline{X}, \underline{X}) := (X, (D^N(\mathbb{K}^n)|_X)/I)$ ein N-differenzierbarer Raum mit der Eigenschaft, daß

$$D_X(I_X) \subset I_X \quad \forall x \in X$$

ist, so gilt:

Es existiert genau ein N-DO $\tilde{D} : \underline{X} \rightarrow \underline{X}$ vom Grade $\leq k$ über X , so daß D eine globale Liftung von $\tilde{D}$ darstellt.

Beweis: Man konstruiert $\tilde{D}$ wie folgt:

$f_x \in \underline{X}_x \leadsto \exists V(x) \subset_{\text{offen}} U$ und einen Repräsentanten $F \in C^N(V)$ mit $f_x = i_x^* F_x$, wobei i_x die in Definition (2.1) erklärte Abbildung ist. Mit diesen Bezeichnungen definiert man

$$(\tilde{D}_x f_x) := i_x^* \left(\sum_{|\alpha| \leq k} (A_\alpha)_x (D^\alpha F)_x \right)$$

und rechnet in kanonischer Weise die einzelnen Eigenschaften für $\tilde{D}$ nach. □

Leider haben die nichtreduzierten N-differenzierbaren Räume die unangenehme Eigenschaft, daß sich, wie das folgende Beispiel zeigen wird, nicht jeder lineare Differentialoperator liften läßt.

Beispiel 2.5.: Mit $X := \{0\} \subset \mathbb{R}$ ist

$\mathbb{X} = (\underline{X}, \underline{X}) := (X, D_0^\infty(\mathbb{R})/m_0^\infty)$ ein ∞ -differenzierbarer, nichtreduzierter Raum.

$\Rightarrow \underline{X}_0$ entspricht dem Raum der formalen Potenzreihen im Nullpunkt

$\Rightarrow$ Definiert man

$$\tilde{D} : \begin{array}{c} \underline{X}_0 \\ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \underline{X}_0 \\ \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \end{array},$$

so gilt:

$\tilde{D}$ ist ein Differentialoperator 0-ter Ordnung über $X \subset \mathbb{R}$

Aber : Wie man leicht nachrechnen kann, läßt sich $\tilde{D}$ nicht zu einem Differentialoperator des umgebenden Raums fortsetzen, d.h. $\tilde{D}$ läßt sich nicht liften !

□

Da die Bedingung der Liftbarkeit aller Differentialoperatoren aber entscheidend für die Betrachtung der „algebraischen Fragen“ in den folgenden Paragraphen ist, beschränken wir uns auf die Strukturen, die diese Eigenschaft, wie wir im folgenden sehen werden, aufweisen.

Definition 2.6.: Sei $\mathbb{X} = (\underline{X}, \underline{X}) := (X, (D^N(\mathbb{K}^n)|X)/I)$ ein N-differenzierbarer Raum im $\mathbb{K}^n$. Fordert man zusätzlich, daß

$$I = \bigcap_{x \in X} (m_x^t + I) \quad \text{für ein } t \in \mathbb{N}$$

ist, so heißt der Raum $\mathbb{X}$ (t)-regulär .

Das diese Bedingung der (t)-Regularität keine so große Einschränkung darstellt, und die klassischen Fälle, wie reduzierte und komplexe Räume, auf denen bisher Differentialoperatoren betrachtet wurden, umfaßt, zeigt die folgende Bemerkung.

Bemerkung 2.7.: Sei $\mathbb{X} = (X, (D^N(\mathbb{K}^n)|X)/I)$ ein N-differenzierbarer Raum über $X \subset \mathbb{K}^n$. Dann gilt :

(a) Sei $\mathbb{X}$ ein komplexer Raum .

~ Für jede hinreichend kleine Umgebung $U \subset_{\text{offen}} X$ existiert ein $t \in \mathbb{N}$, so daß $\mathbb{X}|U$ (t)-regulär ist.

(b) Sei $\mathbb{X}$ ein reduzierter N-differenzierbarer Raum.

~ $\mathbb{X}$ ist (1)-regulär .

(c) Sei $N = \infty$ und $I = N^\infty(X)$.

~ $\mathbb{X}$ ist für kein $t \in \mathbb{N}$ (t)-regulär !

Beweis: (a) folgt aus Satz (2.5.3), S. 104, in [17]

(b),(c) sind trivial

□

Kommen wir nun zu der zentralen Aussage dieses Paragraphen, die wir im folgenden mit „Liftungssatz für N-DO“ bezeichnen werden.

Theorem 2.8.: Sei $\mathbb{X} = (\underline{X}, \underline{X}) := (X, (D^N(\mathbb{K}^n)|X)/I)$ ein (t)-regulärer N-differenzierbarer Raum im $\mathbb{K}^n$ und sei ferner

$$\tilde{D} : \underline{X} \rightarrow \underline{X}$$

ein linearer N-DO vom Grade k über $X \subset \mathbb{K}^n$.

Dann gilt :

$\forall x \in X \exists U(x) \subset_{\text{offen}} \mathbb{K}^n$ und Funktionen $A_\alpha \in C^N(U(x))$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k+t-1$, so daß

$$D := \sum_{|\alpha| \leq k+t-1} A_\alpha D^\alpha : C^N(U(x)) \rightarrow C^N(U(x))$$

eine lokale Liftung von $\tilde{D}$ um $x \in X$ ist.

Beweis: Als erstes fassen wir $\tilde{D}$ als Abbildung zwischen den Schnitten $\Gamma(X, \underline{X}) \rightarrow \Gamma(X, \underline{X})$ auf.

$\sim : C^N(V) \rightarrow \Gamma(X \cap V, \underline{X})$ sei für $V \subset_{\text{offen}} \mathbb{K}^n$ beliebig die kanonische Projektion.

O.E. sei $x = 0 \in X$

Mit $\tilde{b}_\beta := \tilde{D}(\widetilde{x^\beta})$ für $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ und $|\beta| \leq k+t-1$ gilt:

$\exists U(0) \subset \text{offen } \mathbb{K}^n$ und Funktionen $A_\alpha \in C^N(U(0))$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k+t-1$,

so daß

$$\tilde{b}_\beta|_{U(0) \cap X} = \sum_{|\alpha| \leq k+t-1} \tilde{A}_\alpha (\widetilde{D^\alpha x^\beta})|_{U(0) \cap X} \quad \text{für } |\beta| \leq k+t-1$$

ist.

Mit den bisherigen Bezeichnungen zeigen wir nun:

$D := \sum_{|\alpha| \leq k+t-1} A_\alpha D^\alpha : C^N(U(0)) \rightarrow C^N(U(0))$ ist eine globale Lif-

tung von $\tilde{D}|_{U(0) \cap X} : \Gamma(U(0) \cap X, \underline{X}) \rightarrow \Gamma(U(0) \cap X, \underline{X})$.

Beh. 1.: Für alle Polynome P vom Grad $\leq k+t-1$ über $U(0)$ gilt:

$$\tilde{D}(\tilde{P}) = \widetilde{D(P)} = \sum_{|\alpha| \leq k+t-1} \tilde{A}_\alpha (\widetilde{D^\alpha P})$$

Beweis: Die Abbildung D wurde genau so konstruiert, daß sie für alle Polynome bis zu einem bestimmten Grad die Behauptung des Theorems erfüllt.

■

Beh. 2.: Es gilt:

$$\tilde{A}_\alpha \in \bigcup_{x \in U(0) \cap X} \tilde{m}_x^{|\alpha| - k} \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } k < |\alpha| \leq k+t-1$$

Beweis: durch Induktion über $|\alpha| = k+1, \dots, k+t-1$

(i) $|\alpha| = k+1$

Sei $\alpha_0 \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha_0| = k+1$ beliebig gewählt und sei

$x_0 \in X \cap U(0)$. Dann gilt:

$$D((x-x_0)^{\alpha_0}) = \sum_{|\alpha| \leq k} A_\alpha \frac{\alpha_0!}{(\alpha_0 - \alpha)!} (x-x_0)^{\alpha_0 - \alpha} + \alpha_0! A_{\alpha_0}$$

$$\Rightarrow \tilde{D}((x-x_0)^{\alpha_0}) = \widetilde{D((x-x_0)^{\alpha_0})}$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq k} \tilde{A}_\alpha \frac{\alpha_0!}{(\alpha_0 - \alpha)!} (x-x_0)^{\alpha_0 - \alpha} + \alpha_0! \tilde{A}_{\alpha_0}$$

$$\Rightarrow \text{Da } \tilde{D}(\tilde{m}_{x_0}^{k+1}) \in \tilde{m}_{x_0} \text{ und } (x-x_0)^{\alpha_0 - \alpha} \in \tilde{m}_{x_0} \text{ für } |\alpha| \leq k \text{ ist,}$$

$$\text{folgt: } \tilde{A}_{\alpha_0} \in \tilde{m}_{x_0}$$

(ii) $|\alpha| \rightarrow |\alpha|+1 \leq k+t-1$

Sei $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\beta|=|\alpha|+1$ und $x_0 \in U(0) \cap X$ beliebig gewählt.

Dann gilt :

$$\begin{aligned} D((x-x_0)^\beta) &= \sum_{|\gamma| \leq k} A_\gamma \frac{\beta!}{(\beta-\gamma)!} (x-x_0)^{\beta-\gamma} \\ &\quad + \sum_{|\gamma|=k+1} A_\gamma \frac{\beta!}{(\beta-\gamma)!} (x-x_0)^{\beta-\gamma} + \beta! A_\beta \\ \Rightarrow \tilde{A}_\beta &= \frac{1}{\beta!} \left\{ \widetilde{D((x-x_0)^\beta)} - \sum_{|\gamma| \leq k} \tilde{A}_\gamma \frac{\beta!}{(\beta-\gamma)!} \widetilde{(x-x_0)^{\beta-\gamma}} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{|\gamma|=k+1} \tilde{A}_\gamma \frac{\beta!}{(\beta-\gamma)!} \widetilde{(x-x_0)^{\beta-\gamma}} \right\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Da $x_0 \in U(0) \cap X$ ist, folgt :

$$(1) \widetilde{D((x-x_0)^\beta)} \in \tilde{m}_{x_0}^{|\beta|-k} = \tilde{m}_{x_0}^{|\alpha|+1-k}$$

(2) $\forall \gamma \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\gamma| = k+1, \dots, |\alpha|$ gilt nach Induktionsannahme :

$$\tilde{A}_\gamma \cdot \widetilde{(x-x_0)^{\beta-\gamma}} \in \tilde{m}_{x_0}^{|\gamma|-k} \cdot \tilde{m}_{x_0}^{|\beta|-|\gamma|} = \tilde{m}_{x_0}^{|\alpha|+1-k}$$

$\Rightarrow$ Damit gilt :

$$\tilde{A}_\beta \in \tilde{m}_{x_0}^{|\alpha|+1-k}$$

■

Beh. 3.: $\forall f \in C^N(U(0))$ gilt : $(\tilde{D} \tilde{f}) = \sum_{|\alpha|=0}^{k+t-1} \tilde{A}_\alpha (\widetilde{D^\alpha f})$

Beweis: Sei $f \in C^N(U(0))$ beliebig gewählt .

Ist $T_{k+t-1}^y(f)$ das Taylorpolynom von f , entwickelt in y , vom Grad $(k+t-1)$, so gilt für alle $y \in U(0) \cap X$:

$$\begin{aligned} (\tilde{D} \tilde{f}) &= \sum_{|\alpha|=0}^{k+t-1} \tilde{A}_\alpha (\widetilde{D^\alpha f}) \\ &= (\widetilde{D(f - T_{k+t-1}^y(f))}) - \sum_{|\alpha|=0}^{k+t-1} \tilde{A}_\alpha (\widetilde{D^\alpha (f - T_{k+t-1}^y(f))}) \quad (\text{nach Beh.1.}) \\ &\in (\widetilde{D(\tilde{m}_y^{k+t})}) + \sum_{|\alpha|=0}^k \tilde{m}_y^{k+t-|\alpha|} + \sum_{|\alpha|=k+1}^{k+t-1} \tilde{m}_y^{|\alpha|-k} \tilde{m}_y^{k+t-|\alpha|} \quad (\text{nach Beh.2.}) \\ &\in \tilde{m}_y^t \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $I = \bigcap_{x \in X} (m_x^t + I)$ ist, gilt:

$$(\tilde{D} \tilde{f}) = \sum_{|\alpha|=0}^{k+t-1} \tilde{A}_\alpha (\widetilde{D^\alpha f}) = \widetilde{(D f)}$$

Damit haben wir gezeigt, daß D eine lokale Liftung von $\tilde{D}$ in $0 \in X$ ist, womit dann Theorem (2.8) vollständig bewiesen ist. □

Bevor wir uns weiter mit N-Differentialoperatoren beschäftigen, wollen wir an dieser Stelle kurz die Beziehungen zwischen diesen und „höheren Derivationen“ diskutieren, wobei wir den von Nakai geprägten Begriff verwenden.

Spallek definiert in [16] die „schwache Derivation“, für die, wie der Name schon sagt, schwächere Voraussetzungen als für die „höheren Derivationen“ gelten. Allerdings muß man, wie in der gleichen Arbeit gezeigt wird, um die Liftungsaussage auch für die „schwache Derivation“ zu bekommen, eine etwas stärkere Bedingung an die Idealuntergarbe I stellen.

Auf differenzierbaren Räumen liegt der in dieser Arbeit definierte Begriff des N-Differentialoperators genau zwischen „schwacher“ und „höherer Derivation“, wobei allerdings im Falle der (t) -Regularität die drei Begriffe zusammenfallen.

Die nächste Bemerkung ist mehr technischer Natur und gewinnt in den Beweisen des dritten Paragraphen eine gewisse Bedeutung.

Bemerkung 2.9.: Sei $X = (\underline{X}, \underline{X})$ ein (t) -regulärer N-differenzierbarer Raum im $\mathbb{K}^n$.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent :

- (a) $\tilde{D} : \underline{X} \rightarrow \underline{X}$ ist ein linearer N-DO vom Grade k über $X \subset \mathbb{K}^n$
- (b) $\tilde{D} : \underline{X} \rightarrow \underline{X}$ ist ein $\mathbb{K}$ -Garbenhomomorphismus mit $\tilde{D}_x(\tilde{m}_x^{k+n}) \subset \tilde{m}_x^n$ für alle $x \in X$ und $0 \leq n \leq t$

Beweis: Es gilt :

(a) $\Rightarrow$ (b) diese Richtung ist trivial

(a) $\Leftarrow$ (b) Wir haben beim „Liftungssatz für N-DO“ im Beweis neben der Linearität der Differentialoperatoren nur die Tatsache benutzt, daß $\tilde{D}_X(\tilde{m}_X^{k+n}) \subset \tilde{m}_X^n$ für alle $x \in X$ und $0 \leq n \leq t$ ist. Da aber die lokalen Liftungen D für $y \in U(x) \cap X$ jeweils die Eigenschaft haben, daß sie $\tilde{m}_y^{k+n}$ nach $\tilde{m}_y^n$ abbilden, wobei $n \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt werden kann (gilt aufgrund von Beh.2. in (2.8)), folgt auch :

$$\tilde{D}_X(\tilde{m}_X^{k+n}) \subset \tilde{m}_X^n \quad \forall x \in X, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

d.h. $\tilde{D}$ ist ein linearer N-DO vom Grade k über $X \subset \mathbb{K}^n$!

□

Wir haben beim „Liftungssatz für N-DO“ im nichtreduzierten Fall einen N-DO auf X zwar liften können, aber leider hatte die lokale Liftung in $x \in X$ im allgemeinen einen höheren Grad. Das dies nicht nur beweistechnisch erforderlich ist, zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 2.10.: Mit $X := \{0\} \subset \mathbb{R}$ ist $X = (\underline{X}, \underline{X}) := (\{0\}, D_0^\infty(\mathbb{R})/m_0^2)$ ein nichtreduzierter, ∞ -differenzierbarer Raum, der (2)-regulär ist.

$\Rightarrow \underline{X}_0$ entspricht dem Raum der Keime von Polynomen des Grades ≤ 1 im Nullpunkt.

$\Rightarrow$ Definiert man

$$\begin{aligned} \tilde{D} : \underline{X}_0 &\rightarrow \underline{X}_0 \\ (ax+b) &\rightarrow (a+bx) \end{aligned}$$

so gilt : (1) $\tilde{D}$ ist ein $\mathbb{R}$ -Garbenhomomorphismus

$$(2) \tilde{D}(\tilde{m}_0^{1+n}) \subset \tilde{m}_0^n$$

$\Rightarrow \tilde{D}$ ist ein ∞ -DO von der Ordnung 1 über $\{0\}$

$$\Rightarrow D : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad (Df)(x) := xf(x) + \frac{\partial f}{\partial x}(x) - x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x)$$

ist eine Liftung von $\tilde{D}$, denn es gilt :

$$(1) D(\tilde{m}_0^2) \subset \tilde{m}_0^2$$

$$(2) \widetilde{D(ax+b)} = \widetilde{x(ax+b) + a - x \cdot 0} = \widetilde{a + bx + ax^2} = \tilde{D}(\widetilde{ax+b})$$

Es gibt allerdings keinen Differentialoperator der Ordnung ≤ 1 auf einer offenen Teilmenge $U(0) \subset \mathbb{R}$, der eine Liftung von $\tilde{D}$ darstellt, denn:

Ang.: $D := f + g \frac{\partial}{\partial x} : C^\infty(U(0)) \rightarrow C^\infty(U(0))$ wäre eine Liftung von $\tilde{D}$, wobei $f, g \in C^\infty(U(0))$ sind.

$\Rightarrow$ Dann müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein :

- (1) $D(ax+b) = a + bx + x^2 h(x)$, wobei $h \in C^\infty(U(0))$ ist.
 $\Rightarrow f(x) = x + x^2 f_1(x)$, $g(x) = 1 + x^2 g_1(x)$ mit $f_1, g_1 \in C^\infty(U(0))$
- (2) $D(x^2) = x^2 k(x)$, wobei $k \in C^\infty(U(0))$ ist.
 $\Rightarrow g(x) = x g_2(x)$, $g_2 \in C^\infty(U(0))$

$\Rightarrow$ Da es keine C^∞ -Funktion g mit den Eigenschaften unter (1) und (2) gibt, folgt daraus die obige Behauptung. □

Im folgenden wollen wir noch einige für die weitere Behandlung von N-DO wichtige Eigenschaften formulieren.

Bemerkung 2.11.: Sei $X = (\underline{X}, \underline{X}) = (X, (D^N(\mathbb{K}^n) \setminus X)/I)$ ein (t) -regulärer N-differenzierbarer Raum im $\mathbb{K}^n$. Ferner sei

$D := \sum_{|\alpha|=0}^{k+t-1} A_\alpha D^\alpha : C^N(U(x)) \rightarrow C^N(U(x))$ ein N-DO vom Grad $\leq k+t-1$ über $U(x) \subset_{\text{offen}} \mathbb{K}^n$, $x \in X$.

Dann gilt:

D induziert einen N-DO vom Grad $\leq k$ auf $U(x) \cap X$

- $\Leftrightarrow$ (1) $D_y(I_y) \subset I_y \quad \forall y \in U(x) \cap X$
- (2) $A_\alpha \in \bigcup_{y \in U(x) \cap X} m_y^{|\alpha|-k} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } k < |\alpha| \leq k+t-1$

Beweis: Die Behauptung folgt leicht aus dem "Liftungssatz für N-DO" und Bemerkung (2.4.). □

Da wir in den nächsten Paragraphen nur noch Keime von N -Differentialoperatoren betrachten, so ist die folgende Charakterisierung beweistechnisch sehr gut zu verwenden.

Bemerkung 2.12.: Sei $X = (\underline{X}, \underline{X}) = (X, (D^N(\mathbb{K}^n)|X)/I)$ ein (t) -regulärer N -differenzierbarer Raum im $\mathbb{K}^n$, $x \in X$. Dann gilt mit den Bezeichnungen von (1.13.) :

$$D \in \text{DIFF}_X^k(X, N) \Leftrightarrow D_f \in \text{DIFF}_X^{k-1}(X, N) \quad \forall f \in C^N(X, X), \text{ wobei} \\ D_f(g) := D(fg) - f D(g) \text{ ist}$$

Beweis: Diese Eigenschaft folgt sofort aus dem "Liftungssatz für N -DO" und der Bemerkung (2.11.).

□

Diese in Bemerkung (2.12) hergeleitete Eigenschaft von N -DO wird von Vigué in [19] als Definition von Differentialoperator auf analytischen Räumen angesetzt. Da er in der gleichen Arbeit auch die Äquivalenz seiner Begriffsbildung mit der ursprünglichen Definition von Grothendieck in [5] zeigt, und die anderen Autoren wie Bloom in [2] und Kantor in [7] ebenfalls ihre Begriffsbildungen auf die von Grothendieck zurückführen, bedeutet dies, daß die in dieser Arbeit verwandte Definition von N -DO auf analytischen Räumen mit den bisher in der Literatur vorkommenden Definitionen übereinstimmen.

Für den Rest des Paragraphen sei

- (1) $X \subset \mathbb{R}^n$ und $\underline{X} = (\underline{X}, \underline{X}) = (X, (D^\infty(\mathbb{R}^n)|X)/N)$ der zugehörige reduzierte ∞ -differenzierbare Raum
- (2) $\tilde{P} : \underline{X} \rightarrow \underline{X}$ ein $\mathbb{R}$ -Garbenhomomorphismus

Unter diesen Voraussetzungen werden wir zeigen, daß $\tilde{P}$ lokal um $x \in X$ ein ∞ -DO endlicher Ordnung ist, der nach dem Liftungssatz für ∞ -DO auch in den umgebenden Raum fortsetzbar ist.

Der nun folgende Beweis stellt eine Verallgemeinerung eines Beweises von Peetre in [13] dar, der damit zeigte, daß seine abstrakte Charakterisierung von DO auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ mit der üblichen lokal übereinstimmt.

Für den folgenden Beweis benutzen wir die folgenden Eigenschaften von $\tilde{P}$:

- (a) $\tilde{P} : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$ ist eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung
- (b) $\text{Tr}(\tilde{P}f) \subset \text{Tr}(f) \quad \forall f \in C^\infty(X)$
- (c) $\forall U \subset_{\text{offen}}^X$ gilt: $\exists! \tilde{P}_U : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$, der $\mathbb{R}$ -linear ist und die Trägereigenschaft unter (b) erfüllt, so daß
 $(\tilde{P}f)|_U = (\tilde{P}_U f)|_U$ ist.

Wir werden im folgenden die Indizierung von $\tilde{P}$ weglassen, falls klar ist, auf welche Funktionen $\tilde{P}$ anzuwenden ist.

Lemma 2.13.: Unter den gerade zusammengestellten Voraussetzungen und Bezeichnungen gilt:

$\forall x \in X \quad \exists U(x) \subset_{\text{offen}} \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^+$ und $m \in \mathbb{N}$, so daß

$$\|(\tilde{P}f)|_{U(x) \cap X}\|_0 \leq c \cdot \|f\|_m \quad \forall f \in C_0^\infty(U(x))$$

wobei (1) $C_0^\infty(V)$ der Raum der C^∞ -Funktionen mit kompakten Träger in $V \subset_{\text{offen}} \mathbb{R}^n$

$$(2) \|g\|_k := \sum_{|\beta| \leq k} \sup_{x \in V} \{|(D^\beta g)(x)|\} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

$$\|g\|_Y := \sup_{y \in Y} \{|g(y)|\}$$

für $V \subset_{\text{offen}} \mathbb{R}^n, Y \subset V$ und $g \in C_0^\infty(V)$ ist.

Beweis: Wir führen den Beweis indirekt und nehmen zu diesem Zweck das folgende an:

$\exists x \in X$, so daß $\forall U(x) \subset_{\text{offen}} \mathbb{R}^n, \forall c \in \mathbb{R}^+$ und $\forall m \in \mathbb{N}$ jeweils

ein $f_{c,m} \in C_0^\infty(U(x))$ existiert mit

$$\|(\tilde{P}f_{c,m})|_{U(x) \cap X}\|_0 > c \cdot \|f_{c,m}\|_m$$

O.E. sei $x = 0 \in X$ gewählt.

Beh. 1.: Sei $U \subset_{\text{offen}} \mathbb{R}^n$, $Y := U \cap X$ und $f \in C_0^\infty(U)$ eine Funktion mit der Eigenschaft, daß

$$\|(\tilde{P} f|_Y)\|_0 > c \|f\|_m \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{N} \text{ ist.}$$

$\Rightarrow \exists \tilde{f} \in C_0^\infty(U)$, so daß

$$(1) \|\tilde{f}\|_m = 1$$

$$(2) \|(\tilde{P} \tilde{f}|_Y)\|_0 > c$$

Beweis: Da f nach Voraussetzung eine Funktion mit kompakten Träger ist, gilt:

$$\exists d \in \mathbb{R}^+ \text{ mit } \|f\|_m = d$$

Mit $\tilde{f} := \frac{f}{d} \in C_0^\infty(U)$ folgt dann die Behauptung. ■

Beh. 2.: Es existieren Folgen von offenen Kugeln $(K(0, r_k))_{k \in \mathbb{N}}$ um Null mit Radius r_k im $\mathbb{R}^n$, von Funktionen $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $f_k \in C_0^\infty(K(0, r_k))$ und von Punkten $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $0 \neq x_k \in K(0, r_k)$, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$(a) r_{k+1} < \frac{1}{2} r_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$(b) x_k \notin K(0, r_l) \quad \forall l \in \mathbb{N} \text{ mit } l > k$$

$$(c) \|f_k\|_k = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

(d) Definiert man

$$d_1 := 1 \quad \text{und}$$

$$d_k := \left\| \sum_{l=1}^{k-1} \frac{(\tilde{P} f_l|_X)}{2^l} \right\|_0 \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geq 2,$$

so gilt :

$$|(\tilde{P} f_k|_X)(x_k)| > 2^k d_k (c_k + 1), \quad \text{wobei}$$

c_k eine reelle Konstante mit $c_k d_k \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ ist.

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Induktion über $k \in \mathbb{N}$

(I.A.) $k = 1$

Sei $K(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ die offene Einheitskugel um 0 im $\mathbb{R}^n$.

Mit $m = 1$ und $c = 2^3$ gilt nach Lemmaannahme und Behauptung 1 :
 $\exists f_1 \in C_0^\infty(K(0,1))$ mit

$$(1) \|f_1\|_1 = 1$$

$$(2) \|(\tilde{P} f_1|_{K(0,1) \cap X})\|_0 > 2^3$$

$\sim \exists x_1 \in K(0,1) \cap X$ mit $x_1 \neq 0$, so daß $|(\tilde{P} f_1|_{K(0,1) \cap X})| > 2^2$

Mit $c_1 := 1$ ergibt sich dann der Induktionsanfang.

(I.S.) $k \rightarrow k+1$

Sei d_{k+1} wie in der Beh.2 (d) definiert.

$\sim \exists c_{k+1} \in \mathbb{R}^+$ mit $c_{k+1} \cdot d_{k+1} \geq (k+1)$

Wählt man

$$(1) r_{k+1} \in \mathbb{R}^+ \text{ so, daß } 0 < r_{k+1} < \min \left\{ \frac{1}{2} r_k ; |x_k| \right\}$$

$$(2) m := k+1$$

$$(3) c := 2^{k+2} \cdot d_{k+1} \cdot (c_{k+1} + 1) ,$$

so gilt nach Lemmaannahme und Behauptung 1 :

$\exists f_{k+1} \in C_0^\infty(K(0, r_{k+1}))$ mit

$$(1) \|f_{k+1}\|_{k+1} = 1$$

$$(2) \|(\tilde{P} f_{k+1}|_{K(0, r_{k+1}) \cap X})\|_0 > 2^{k+2} \cdot d_{k+1} \cdot (c_{k+1} + 1)$$

$\sim \exists x_{k+1} \in K(0, r_{k+1}) \cap X$ mit

$$|(\tilde{P} f_{k+1}|_{K(0, r_{k+1}) \cap X})(x_{k+1})| > 2^{k+1} \cdot d_{k+1} \cdot (c_{k+1} + 1)$$

Damit sind alle Größen mit den gewünschten Bedingungen für $(k+1)$ konstruiert.

Beh. 3.: Mit den bisher benutzten Bezeichnungen gilt :

$f := \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine C^∞ -Funktion mit kompaktem Träger.

Beweis: Da die Funktionen f_k alle einen kompakten Träger in $K(0,1)$ haben, sind sie trivialerweise durch die Nullfunktion außerhalb von $K(0,1)$ auf den $\mathbb{R}^n$ fortsetzbar.

Ferner existiert für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ jeweils ein $M_\alpha \in \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft:

$$(1) \alpha = (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}_0^n$$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \|2^{-k} f_k\|_0 \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \|2^{-k} f_k\|_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} \leq M_\alpha < \infty$$

$$(2) \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \neq 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} \|2^{-k} (D^\alpha f_k)\|_0 &= \sum_{k=1}^{|\alpha|-1} \|2^{-k} (D^\alpha f_k)\|_0 + \sum_{k=|\alpha|}^{\infty} \|2^{-k} (D^\alpha f_k)\|_0 \\ &\leq \sum_{k=1}^{|\alpha|-1} \|2^{-k} (D^\alpha f_k)\|_0 + \sum_{k=|\alpha|}^{\infty} 2^{-k} \|f_k\|_k \\ &\leq M_\alpha < \infty \end{aligned}$$

~ Dann gilt nach dem Weierstraß-Kriterium : $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

~ Da aufgrund der Eigenschaften der f_k die Funktion f trivialerweise einen kompakten Träger besitzt, ist auch diese Behauptung bewiesen. ■

Nach diesen Zwischenschritten kommen wir nun wieder zum Beweis des Lemmas (2.13) zurück.

Nach Behauptung 3 gilt :

$$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \sim |(\tilde{P} f|_X)(0)| < \infty$$

Da aber

$$\begin{aligned} |(\tilde{P} f|_X)(x_k)| &= \left| \sum_{l=1}^k 2^{-l} (\tilde{P} f_l|_X)(x_k) \right| \\ &\geq 2^{-k} |(\tilde{P} f_k|_X)(x_k)| - \left| \sum_{l=1}^{k-1} 2^{-l} (\tilde{P} f_l|_X)(x_k) \right| \\ &\geq 2^{-k} |(\tilde{P} f_k|_X)(x_k)| - \left\| \sum_{l=1}^{k-1} 2^{-l} (\tilde{P} f_l|_X) \right\|_0 \\ &\geq d_k(c_k + 1) - d_k = d_k \cdot c_k \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

und $\lim x_k = 0$, folgt sofort der Widerspruch. □

Lemma 2.14.: Sei $U \subset_{\text{offen}} \mathbb{R}^n$ und es mögen $c \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{N}$ existieren, so daß

$$\|(\tilde{P} g|_{X \cap U})\|_0 \leq c \|g\|_m \quad \forall g \in C_0^\infty(U) \quad \text{ist.}$$

Dann gilt :

Ist $f \in C^\infty(U)$ m -flach in $x_0 \in U \cap X$, so ist $(\tilde{P} f|_{U \cap X})(x_0) = 0$!

Beweis: O.E. sei $x_0 = 0 \in U \cap X$

und $f \in C^\infty(U)$ eine in 0 m -flache Funktion.

Beh.: $\forall n \in \mathbb{N} \exists g_n \in C^\infty(U)$, $0 \in U_n \subset_{\text{offen}} U$, so daß die folgenden Bedingungen gelten :

- (1) $g_n|_{U_n} \equiv 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (2) $U_{n+1} \subset U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (3) $\|g_n - f\|_m < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (4) $g_n - f \in C_0^\infty(U) \quad \forall n \geq n_0$

Beweis: siehe Lemma (1.5.2), S.29, in [11]

Dann gilt :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\tilde{P} (g_n - f)|_{X \cap U})\|_0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot \|g_n - f\|_m = 0$$

Da $\text{Tr}((\tilde{P} g_n|_{X \cap U})) \subset \text{Tr}(g_n|_{X \cap U})$ und $g_n|_{U_n} \equiv 0$ ist, folgt :

$$(\tilde{P} g_n|_{U \cap X})(0) = 0$$

$$\leadsto (\tilde{P} f|_{U \cap X})(0) = 0$$

Faßt man die Aussagen der Lemmas (2.13) und (2.14) zusammen, so gilt

Lemma 2.15.: Unter den üblichen Bezeichnungen gilt :

$\forall x \in X \exists$ Kugel $B(x, r_x) \subset_{\text{offen}} \mathbb{R}^n$, $r_x > 0$ und ein $m \in \mathbb{N}$, so daß

$\tilde{P}|_{B(x, r_x) \cap X}$ einen ∞ -DO vom Grade m über $B(x, r_x) \cap X$ darstellt .

Beweis: Da $\tilde{P}$ nach Voraussetzung ein $\mathbb{R}$ -Garbenhomomorphismus ist und $\tilde{P}_y(m_y^{m+1}) \subset m_y \quad \forall y \in B(x, r_x) \cap X$ ist, folgt die Behauptung trivialerweise aus Bemerkung (2.9) !

□

Fassen wir nun die Ergebnisse, die wir im einzelnen gezeigt haben, in dem folgenden Theorem zusammen.

Theorem 2.16.: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ und $\mathbb{X} = (\underline{X}, \underline{X}) := (X, (D^\infty(\mathbb{R}^n)|X)/N)$ der zugehörige reduzierte ∞ -differenzierbare Raum.

Ferner sei $\tilde{P} : \underline{X} \rightarrow \underline{X}$ ein $\mathbb{R}$ -Garbenhomomorphismus.

Dann gilt :

- (1) $\forall x \in X$ ist $\tilde{P}$ lokal um $x \in X$ ein ∞ -DO endlicher Ordnung !
- (2) Betrachtet man diesen Sachverhalt keimweise, so ist die Menge der Keime von $\mathbb{R}$ -Garbenhomomorphismen auf X in $x \in X$ identisch mit $\text{DIFF}_x(\mathbb{X}, \infty)$!

§ 3 Untersuchung des $C^N(X, x)$ -Moduls $\text{DIFF}_X^k(X, N)$ auf endliche Erzeugtheit

In diesem Paragraphen soll der $C^N(X, x)$ -Modul der N -Differentialoperatoren vom Grad $\leq k$ über $X \subset \mathbb{K}^n$ auf endliche Erzeugtheit untersucht werden. Die Wichtigkeit dieser Fragestellung resultiert dabei aus der Tatsache, daß die Beantwortung der „Malgrangschen Frage“ (siehe Einleitung) in den Spezialfällen, in denen Vigüé in [19] und Kantor in [7] sie lösen konnten, nur durch den Nachweis der endlichen Erzeugtheit von $\text{DIFF}_X^k(X, \omega^*)$, X complex-analytisch, möglich war.

Allerdings muß an dieser Stelle gleich darauf aufmerksam gemacht werden, daß im Falle $N = \infty$ es durchaus sein kann, daß die Endlichkeit des oben erwähnten Moduls keine notwendige Bedingung für die positive Beantwortung des „Malgrangschen Problems“ sein muß, wie man an den Untersuchungen im 5. Paragraphen sehen wird.

Dabei wollen wir diese Frage nur für (t) -reguläre N -differenzierbare Räume behandeln. Dies liegt darin begründet, daß wir klassifizierende Aussagen über N -Differentialoperatoren auf X im Moment nur dadurch machen können, indem wir diese in den umgebenden Raum fortsetzen und dort ihre charakterisierenden Eigenschaften betrachten. Dies bedeutet aber, daß wir jeden N -Differentialoperator auf X liften können müssen, und, wie wir im 2. Paragraphen gesehen haben, ist dies nur für (t) -reguläre N -differenzierbare Räume möglich.

Wir werden unter den gerade erwähnten Voraussetzungen in diesem Paragraphen zeigen:

- (1) Ist $N = \omega, \omega^*$, so ist der $C^N(X, x)$ -Modul $\text{DIFF}_X^k(X, N) \forall k \in \mathbb{N}$ endlich erzeugt.
- (2) Ist $N = \infty$, so ist der $C^\infty(X, x)$ -Modul $\text{DIFF}_X^k(X, \infty)$ nicht immer endlich erzeugt.

Man kann allerdings für ∞ -differenzierbare Räume, die von „reellanalytischem endlichen Typ“ (siehe Definition (3.16)) sind, zeigen, daß auf diesen $\text{DIFF}_X^k(X, \infty)$ ebenfalls endlich erzeugt wird.

Sei also in diesem Paragraphen

$X = (\underline{X}, \underline{X}) = (X, (D^N(\mathbb{K}^n)|X)/I)$ ein (t) -regulärer N -differenzierbarer Raum im $\mathbb{K}^n$.

Für die weiteren Betrachtungen haben sich die folgenden Mengen als wichtig herausgestellt.

Definition 3.1.: Es sei

(a) $\text{DIFF}_{x,I}^k(\mathbb{K}^n, N) := \{D \in \text{DIFF}_x^{k+t-1}(\mathbb{K}^n, N) \mid \exists U(x) \subset_{\text{offen}} \mathbb{K}^n \text{ und einen Re-}$

$$\text{präsentanten } D^* = \sum_{|\alpha|=0}^{k+t-1} A_\alpha D^\alpha: C^N(U(x)) \rightarrow C^N(U(x))$$

$$\text{mit (1) } D_y^*(I_y) \subset I_y \quad \forall y \in U(x) \cap X$$

$$(2) A_\alpha \in \bigcap_{y \in U(x) \cap X} m_y^{|\alpha|-k} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$$

$$\text{mit } k < |\alpha| \leq k+t-1 \}$$

(b) $\text{DIFF}_{x,0}^k(\mathbb{K}^n, N) := \{D \in \text{DIFF}_{x,I}^k(\mathbb{K}^n, N) \mid \exists U(x) \subset_{\text{offen}} \mathbb{K}^n \text{ und einen Reprä-}$

sentanten $D^*: C^N(U(x)) \rightarrow C^N(U(x))$ mit den Eigen-

schaften unter (a) und $D_y(D_y^N(\mathbb{K}^n)) \subset I_y$

$$\forall y \in U(x) \cap X \}$$

Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich

Bemerkung 3.2.: (a) $\text{DIFF}_x^m(\mathbb{K}^n, N)$ ist $\forall m \in \mathbb{N}$ ein endlich erzeugter

$C^N(\mathbb{K}^n, x)$ -Modul.

(b) $\text{DIFF}_{x,I}^k(\mathbb{K}^n, N)$ ist ein $C^N(\mathbb{K}^n, x)$ -Untermodul von $\text{DIFF}_x^{k+t-1}(\mathbb{K}^n, N)$.

(c) $\text{DIFF}_{x,0}^k(\mathbb{K}^n, N)$ ist ein $C^N(\mathbb{K}^n, x)$ -Untermodul von $\text{DIFF}_x^{k+t-1}(\mathbb{K}^n, N)$ und ebenfalls von $\text{DIFF}_{x,I}^k(\mathbb{K}^n, N)$.

Bemerkung 3.3.: Sei $N = \omega, \omega^*$.

(a) $\text{DIFF}_x^{k+t-1}(\mathbb{K}^n, N)/\text{DIFF}_{x,0}^k(\mathbb{K}^n, N)$ ist ein endlich erzeugter $C^N(X, x)$ -Modul.

(b) $\text{DIFF}_{x,I}^k(\mathbb{K}^n, N) / \text{DIFF}_{x,0}^k(\mathbb{K}^n, N)$ ist als Untermodul von $\text{DIFF}_x^{k+t-1}(\mathbb{K}^n, N) / \text{DIFF}_{x,0}^k(\mathbb{K}^n, N)$ endlich erzeugt über $C^N(X, x)$.

Beweis: (a) klar

(b) Da $C^N(X, x)$ für $N = \omega$, ω^* noethersch ist, gilt:

$\text{DIFF}_{x,I}^k(\mathbb{K}^n, N) / \text{DIFF}_{x,0}^k(\mathbb{K}^n, N)$ ist als Untermodul eines nach (a) endlich erzeugten $C^N(X, x)$ -Moduls wieder endlich erzeugt!

□

Mit diesen Hilfsaussagen erhält man nun:

Satz 3.4.: Für $N = \omega$, ω^* ist der $C^N(X, x)$ -Modul $\text{DIFF}_x^k(X, N)$ endlich erzeugt.

Beweis: Nach Bemerkung (2.11) gehören die Liftungen von N -Differentialoperatoren $\tilde{D} \in \text{DIFF}_x^k(X, N)$ zu der Menge $\text{DIFF}_{x,I}^k(\mathbb{K}^n, N)$.

Definiert man

$$\begin{array}{ccc} j : \text{DIFF}_{x,I}^k(\mathbb{K}^n, N) & \rightarrow & \text{DIFF}_x^k(X, N) \\ D & \mapsto & \tilde{D} \end{array}$$

als Einschränkungabbildung des N -DO D auf $\underline{X}$, so gilt:

Kern $j = \text{DIFF}_{x,0}^k(\mathbb{K}^n, N)$

$\sim \text{DIFF}_x^k(X, N)$ ist isomorph zu $\text{DIFF}_{x,I}^k(\mathbb{K}^n, N) / \text{DIFF}_{x,0}^k(\mathbb{K}^n, N)$

$\sim$ Mit Bemerkung (3.3)(b) folgt dann die Behauptung.

□

Leider reicht im Falle von ∞ -differenzierbaren Räumen die (t)-Regularität zum Nachweis der endlichen Erzeugtheit der gerade betrachteten Differentialoperatormoduln nicht aus.

Aus diesem Grunde sei für die folgende Betrachtung

$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y = 0, x \leq 0) \vee (x > 0, y \in \mathbb{R})\} \subset \mathbb{R}^2$ und

$X = (\underline{X}, \underline{X})$ der zugehörige reduzierte ∞ -differenzierbare Raum.

Bemerkung 3.5.: X ist keine reellanalytische Menge !

Bemerkung 3.6.: Mit den bisherigen Bezeichnungen gilt:

Die linearen Abbildungen

$$(a) \tilde{D}_1 := \frac{\partial}{\partial x} : C^\infty(X, 0) \rightarrow C^\infty(X, 0)$$

$$(b) \tilde{D}_2 := y \frac{\partial}{\partial y} : C^\infty(X, 0) \rightarrow C^\infty(X, 0)$$

$$(c) \tilde{D}_f := f(x) \frac{\partial}{\partial y} : C^\infty(X, 0) \rightarrow C^\infty(X, 0), \text{ wobei } f \in C^\infty(\mathbb{R}, 0) \text{ mit } f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^- \text{ ist,}$$

sind ∞ -Differentialoperatoren 1. Grades über X .

Beweis: Seien D_1, D_2, D_f die in natürlicher Weise auf $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ definierten Fortsetzungen von $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2$ und $\tilde{D}_f$ und sei $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ eine Funktion mit $g|_X = 0$.

Dann gilt:

$$(a) (D_1 g)(x, y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in X$$

$$(b) (D_2 g)(x, y) = y \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in X$$

$$(c) (D_f g)(x, y) = f(x) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$$

$$= \begin{cases} 0 & x \leq 0 \text{ (da } f(\mathbb{R}_0^-) = 0 \text{)} \\ 0 & x > 0 \text{ (da } g(x, y) = 0 \text{ für } x > 0 \text{)} \end{cases} \equiv 0$$

Da die Differentialoperatoren D_1, D_2, D_f das Ideal N wieder in das Ideal N abbilden, folgt aus Bemerkung (2.4), daß die von diesen auf X induzierten Abbildungen $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, \tilde{D}_f$ auch wiederum Differentialoperatoren auf X sind.

□

Bemerkung 3.7.: Mit den bisherigen Bezeichnungen gilt:

$$\text{DIFF}_0^1(X, \infty) = \langle 1, \tilde{D}_1, \tilde{D}_2, \tilde{D}_f \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}, 0) \text{ mit } f|_{\mathbb{R}_0^-} = 0 \rangle_{C^\infty(X, 0)}$$

Beweis: Sei $\tilde{D} \in \text{DIFF}_0^1(X, \infty)$ beliebig

$$\sim \text{O.E. sei } \tilde{D} = g_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + g_2(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \text{ wobei } g_2(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^-.$$

~ Da $g_2(0,0) = 0$ ist, gilt:

~ $\exists h_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^2, 0)$, $h_2 \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$, so daß $g_2(x,y) = y h_1(x,y) + h_2(x)$ ist

~ O.E. sei $g_1 \equiv h_1 \equiv 0$

~ $\tilde{D} = h_2(x) \frac{\partial}{\partial y}$ mit $h_2(\mathbb{R}_0^-) = 0$

~ $\tilde{D} \in \langle 1, \tilde{D}_1, \tilde{D}_2, \tilde{D}_f \text{ für } f \in C^\infty(\mathbb{R}, 0) \text{ mit } f(\mathbb{R}_0^-) = 0 \rangle_{C^\infty(X,0)}$

□

Satz 3.8.: Mit den bisherigen Bezeichnungen gilt:

Der $C^\infty(X,0)$ -Modul $\text{DIFF}_0^1(X,\infty)$ ist nicht endlich erzeugt !

Beweis: Ang.: die Aussage des Satzes (3.8) wäre falsch

~ $\exists$ endlich viele Erzeugende $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, \dots, \tilde{D}_m$ von $\text{DIFF}_0^1(X,\infty)$ über $C^\infty(X,0)$

~ O.E. sei $\tilde{D}_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\tilde{D}_2 = y \frac{\partial}{\partial y}$ und $\tilde{D}_k = f_k(x) \frac{\partial}{\partial y}$ für $k = 3, \dots, m$, wobei $f_k(\mathbb{R}_0^-) = 0$ ist.

Beh.1.: Der Raum der Funktionen $g \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$ mit $g(\mathbb{R}_0^-) = 0$ ist nicht abzählbar erzeugt über $C^\infty(\mathbb{R}, 0)$!

Beweis: siehe S.22 der Vorlesungsmitschrift [14]

■

~ Aufgrund von Behauptung (1) gilt nun:

$\exists g \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$ mit $g(\mathbb{R}_0^-) = 0$, so daß $g \notin \langle f_1, \dots, f_m \rangle_{C^\infty(\mathbb{R}, 0)}$

~ $\tilde{D} := g(x) \frac{\partial}{\partial y} \in \text{DIFF}_0^1(X,\infty)$, aber $\tilde{D} \notin \langle \tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_m \rangle_{C^\infty(X,0)}$

~ Widerspruch!

~ $\text{DIFF}_0^1(X,\infty)$ ist nicht endlich erzeugt über $C^\infty(X,0)$

□

Mit analoger Argumentation zeigt man

Bemerkung 3.9.: $\text{DIFF}_0^k(X,\infty)$ ist $\forall k \in \mathbb{N}$ nicht endlich erzeugt über $C^\infty(X,0)$!

Neben diesem an sich schon erstaunlichem Phänomen kann es durchaus sein, wie die folgenden Beispiele zeigen werden, daß die Moduln $\text{DIFF}_X^k(\mathbb{X}, \infty)$ für $k \leq k_0$ endlich und für $k > k_0$ nicht endlich erzeugt über $C^\infty(X, X)$ sind.

Beispiel 3.10.: Sei $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y = z = 0) \vee (y^3 = z^2, x > 0)\}$ und $\mathbb{X} = (\underline{X}, \underline{X})$ sei der zugehörige reduzierte ∞ -differenzierbare Raum. Dann gilt:

- (a) X ist keine reellanalytische Menge !
- (b) $\text{DIFF}_0^1(\mathbb{X}, \infty)$ ist ein endlich erzeugter $C^\infty(X, 0)$ -Modul .
- (c) Für $k \geq 2$ ist $\text{DIFF}_0^k(\mathbb{X}, \infty)$ kein endlich erzeugter $C^\infty(X, 0)$ -Modul .

Beweis: (b) Betrachten wir als erstes die Differentialoperatoren 1. Ordnung auf der Neillschen Parabel ($y^3 = z^2$).

Wie wir im vierten Paragraphen nachweisen werden, werden diese DO von $1 ; 2y \frac{\partial}{\partial y} + 3z \frac{\partial}{\partial z} ; 2z \frac{\partial}{\partial y} + 3y^2 \frac{\partial}{\partial z}$ aufgespannt.

~ Da diese Differentialoperatoren auch in natürlicher Weise als Differentialoperatoren auf $\mathbb{X}$ betrachtet werden können, rechnet man leicht nach, daß

$$\text{DIFF}_0^1(\mathbb{X}, \infty) = \left\langle 1 ; \frac{\partial}{\partial x} ; 2y \frac{\partial}{\partial y} + 3z \frac{\partial}{\partial z} ; 2z \frac{\partial}{\partial y} + 3y^2 \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle_{C^\infty(X, 0)},$$

also ein endlich erzeugter $C^\infty(X, 0)$ -Modul ist.

(c) Zunächst betrachten wir wieder wie unter (a) die Differentialoperatoren 2. Ordnung auf der Neillschen Parabel ($y^3 = z^2$).

Neben den unter (a) erwähnten Erzeugenden kommen nun noch die folgenden Differentialoperatoren hinzu:

$$(1) z \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + 3y^2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \frac{9}{4} y z \frac{\partial^2}{\partial^2 z} + \frac{3}{4} y \frac{\partial}{\partial y}$$

$$(2) y \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + 3z \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \frac{9}{4} y^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y}$$

Wie man sieht, ist der DO unter (2) kein DO auf $\mathbb{X}$, da der Koeffizient vor $\frac{\partial}{\partial y}$ auf der negativen x -Achse nicht verschwindet.

Multipliziert man allerdings den DO unter (2) mit einer Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$ mit $f(\mathbb{R}_0^-) = 0$, so ist der so konstruierte DO einer auf $\mathbb{X}$.

Mit einer analogen Argumentation wie im Satz (3.8) folgt dann, daß $\text{DIFF}_0^2(\mathbb{X}, \infty)$ kein endlich erzeugter $C^\infty(X, 0)$ -Modul ist.

Die Behauptung, daß $\text{DIFF}_0^k(\mathbb{X}, \infty)$ für $k > 2$ ebenfalls nicht endlich erzeugt ist, ergibt sich dann in kanonischer Weise.

□

Nun könnte man, wenn man die beiden Beispiele miteinander vergleicht, vielleicht vermuten, daß die Einbettungsdimension bzw. die Dimension der Mannigfaltigkeitspunkte in der Umgebung von 0 eine „Bezugsgröße“ dafür sind, ab welcher Ordnung die Moduln nicht mehr endlich erzeugt sind. Das diese Vermutung nicht richtig sein kann, wird uns das folgende Beispiel zeigen.

Beispiel 3.11.: Sei für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$X_n := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y = z = 0) \vee (y^{n+1} = z^n, x > 0)\}$ und sei

$X_n = (X_n, \underline{X}_n)$ der zugehörige reduzierte ∞ -differenzierbare Raum.

Dann gilt :

(a) Für $k < n$ ist $\text{DIFF}_0^k(\mathbb{X}_n, \infty)$ ein endlich erzeugter $C^\infty(X_n, 0)$ -Modul.

(b) Für $k \geq n$ ist $\text{DIFF}_0^k(\mathbb{X}_n, \infty)$ kein endlich erzeugter $C^\infty(X_n, 0)$ -Modul.

Beweis: Die Argumentation ist exakt die gleiche wie in Beispiel (3.10). Zuerst betrachtet man wieder die jeweiligen Differentialoperatoren auf der Menge $(y^{n+1} = z^n)$.

Da diese sich bis zur Ordnung $(n-1)$ in kanonischer Weise als Differentialoperatoren auf $\mathbb{X}_n$ betrachten lassen, folgt die Behauptung unter (a).

Ab der Ordnung n taucht exakt das gleiche Phänomen wie in Beispiel (3.10) auf, nämlich daß der Koeffizient vor $\frac{\partial}{\partial y}$ auf der negativen x -Achse nicht verschwindet (für mindestens einen Differentialoperator).

Mit der gleichen Argumentation wie in Beispiel (3.10) folgt dann die Behauptung unter (b).

□

Aus diesen Betrachtungen resultiert nun die folgende Frage:

Für welche $\mathbb{X} = (\underline{X}, \underline{X}) = (X, (D^\infty(\mathbb{R}^n)|X)/I)$, $\mathbb{X}$ ∞ -differenzierbarer Raum, ist der $C^\infty(X, x)$ -Modul $\text{DIFF}_x^k(\mathbb{X}, \infty) \quad \forall k \in \mathbb{N}$ endlich erzeugt?

Wir werden im folgenden eine positive Antwort auf diese Frage im Falle von ∞ -differenzierbaren Räumen geben, die von reellanalytischem endlichen Typ sind.

An dieser Stelle sei allerdings angemerkt, daß es durchaus ∞ -differenzierbare Räume gibt, deren Nullstellenideal überhaupt nicht von endlichem Typ ist, deren Differentialoperatormoduln aber alle endlich erzeugt sind. Beispiele dieser Art werden die Untersuchungen im 5. Paragraphen liefern.

Bevor wir jedoch diese Ergebnisse herleiten werden, stellen wir hier einige später gebrauchte, schon seit langem bekannte Ergebnisse und Definitionen zusammen.

Definition 3.12.: Sei A ein Ring, E sei ein A -Modul.

Dann heißt E flach, falls eine der beiden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

(a) Für jede exakte Sequenz $M' \rightarrow M \rightarrow M''$ von A -Moduln ist auch die Sequenz $E \otimes_A M' \rightarrow E \otimes_A M \rightarrow E \otimes_A M''$ exakt !

(b) Für jedes Ideal I von A ist die natürliche Abbildung

$$I \otimes_A E \rightarrow E \text{ injektiv !}$$

Bemerkung 3.13.: Sei $f = (f_1, \dots, f_n) \in A^n$ und sei

$R(f, E) := \{(e_1, \dots, e_n) \in E^n \mid \sum f_i e_i = 0\}$ der Relationenmodul bzgl f in E^n .

Dann gilt:

$$E \text{ ist flach} \iff \forall n \in \mathbb{N}, f \in A^n \text{ gilt : } R(f, E) = R(f, A) \cdot E$$

Beweis: siehe S.42, Proposition (4.2) in [9]

□

Bemerkung 3.14.: Sei $f = (f_1, \dots, f_n)$, $f_i \in A^k$ für $i=1, \dots, n$ und $R(f, E) := \{(e_1, \dots, e_n) \in E^n \mid \sum f_i e_i = 0\}$ der Relationenmodul bzgl f in E^n .

Dann gilt:

$$E \text{ flach} \Rightarrow R(f, E) = R(f, A) \cdot E$$

Beweis: siehe S.42, Bemerkung (4.3) in [9] □

Die Beziehung zu den in dieser Arbeit interessierenden Problemstellungen wird durch die folgende Bemerkung geklärt.

Bemerkung 3.15.: (a) $C^\infty(\mathbb{R}^n, x)$ ist ein $C^\omega(\mathbb{R}^n, x)$ -Modul.

(b) $C^\infty(\mathbb{R}^n, x)$ ist flach bzgl. $C^\omega(\mathbb{R}^n, x)$.

(c) Ist $f_i \in (C^\omega(\mathbb{R}^n, x))^k$ für $i = 1, \dots, n$, so erzeugen die reellanalytischen Lösungen der Relation $\sum f_i e_i = 0$ über $C^\infty(\mathbb{R}^n, x)$ auch die beliebig oft differenzierbaren.

Beweis: (b) siehe Korollar (1.12), S.88 in [9]

(c) folgt direkt aus Bemerkung (3.14) und der Aussage unter (b) □

Kommen wir nun zu der schon angekündigten

Definition 3.16.: Sei $X = (X, \underline{X}) = (X, (D^\infty(\mathbb{R}^n)|X)/I)$ ein (t) -regulärer ∞ -differenzierbarer Raum im $\mathbb{R}^n$.

Dann heißt X von reellanalytischem endlichen Typ in $x \in X$, falls

(a) eine Menge $M \subset \{1, \dots, t-1\} \cup \{1\}$ mit $1 \in M$ existiert, für die gilt:

$$m \in \{1, \dots, t-1\} - M \Rightarrow (m-1) \in M$$

(b) eine Umgebung $U(x) \subset_{\text{offen}} \mathbb{R}^n$ und Funktionen $f_1, \dots, f_{k_1} \in C^\omega(U(x))$, $h_1^m, \dots, h_{l_m}^m \in C^\omega(U(x))$ für alle $m \in M$ existieren, so daß für alle $y \in U(x) \cap X$ die folgenden Beziehungen gelten:

(1) $N_y^{(m)} := \{g_y \in D_y^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \exists V(y) \subset_{\text{offen}} \mathbb{R}^n \text{ und einen Repräsentanten}$

$$\begin{aligned} G \in C^\infty(V(y)) \text{ von } g_y \text{ mit } (D^V G)|_{V(y) \cap X} &= 0 \text{ für } |v|=0, \dots, m-1\} \\ &= \langle (h_1^m)_y, \dots, (h_{l_m}^m)_y \rangle_{C^\infty(\mathbb{R}^n, y)} \quad \forall m \in M \end{aligned}$$

(2) $I_y = \langle (f_1)_y, \dots, (f_{k_1})_y \rangle_{C^\infty(\mathbb{R}^n, y)}$

Beispiel 3.17.: Seien die nun folgenden Mengen X jeweils mit der reduzierten ∞ -differenzierbaren Raumstruktur versehen.

Dann gilt :

(a) $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3\}$

$\sim X$ ist von reellanalytischem endlichen Typ in $0 \in \mathbb{R}^2$

(b) $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ ist rational, } y \text{ ist rational}\}$
 $\leadsto \mathbb{X}$ ist von reellanalytischem endlichen Typ in $0 \in \mathbb{R}^2$

(c) Sei $f(x) := \begin{cases} \exp(-x^{-2}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \in C^\infty(\mathbb{R})$ und
 $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y(y-f(x)) = 0\}$
 $\leadsto \mathbb{X}$ ist nicht von reellanalytischem endlichen Typ in $0 \in \mathbb{R}^2$, obwohl
 $N(X)$ nur von einem Element erzeugt wird und damit von endlichem
Typ ist.

Beweis: Die jeweilige Behauptung folgt sofort aus der Tatsache, daß
für alle $(x,y) \in X$ gilt:

- (a) $N_{(x,y)} = \langle y^2 - x^3 \rangle_{C^\infty(\mathbb{R}^2, (x,y))}$
(b) $N_{(x,y)} = \langle 0 \rangle_{C^\infty(\mathbb{R}^2, (x,y))}$
(c) $N_{(x,y)} = \langle y(y-f(x)) \rangle_{C^\infty(\mathbb{R}^2, (x,y))}$ und f keine reellanalytische
Funktion ist. □

Sei also für den Rest des Paragraphen jeweils

$\mathbb{X} = (\underline{X}, \underline{X}) = (X, (D^\infty(\mathbb{R}^n)|X)/I)$ ein (t) -regulärer ∞ -differenzierbarer
Raum im $\mathbb{R}^n$, der von reellanalytischem endlichen Typ in $x \in X$ ist.

Unter dieser Voraussetzung gilt:

Bemerkung 3.18.: Es sei

$D := \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha D^\alpha : C^\infty(\mathbb{R}^n, x) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n, x)$ ein linearer ∞ -Differential-
operatorkeim vom Grad m über dem $\mathbb{R}^n$ in $x \in X$.

Dann gilt:

D induziert einen ∞ -Differentialoperator keim vom Grad m über X in $x \in X$

$\iff \forall$ Polynome P vom Grad $\leq (t+m-2)$ und $i = 1, \dots, k_1$ gilt:

$$D(P_X (f_i)_X) \in \mathcal{I}_X$$

Beweis: " $\Rightarrow$ " trivial

" $\Leftarrow$ " 0.E. sei $\hat{D}$ ein auf $U(x) \subset_{\text{offen}} \mathbb{R}^n$ definierter Repräsentant von D

$\sim$ 0.E. sei dann $U(x)$ so gewählt, daß $\forall y \in U(x) \cap X$ gilt:

$$\hat{D}_y(P_y(f_i)_y) \in I_y \quad \forall \text{ Polynome } P \text{ vom Grad } \leq (t+m-2)$$

Sei $y \in U(x)$ und $g_y \in I_y$ beliebig gewählt.

$\sim \exists \beta_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n, y)$, so daß $\sum_{i=1}^{k_1} \beta_i (f_i)_y = g_y$ ist.

$\sim$ 0.E. wähle Repräsentanten $g, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_{k_1} \in C^\infty(U(x))$ von $g_y, \beta_1, \dots, \beta_{k_1}$, so daß

$$g = \sum_{i=1}^{k_1} \hat{\beta}_i f_i \quad \text{ist.}$$

$\sim \forall z \in U(x) \cap X$ ist

$$\begin{aligned} \hat{D}_z((\hat{\beta}_i)_z (f_i)_z) &\in I_z + \hat{D}_z(((\hat{\beta}_i)_z - (T_z^{t+m-2} \hat{\beta}_i)_z)(f_i)_z) \\ &\subset I_z + \hat{D}_z(m_z^{t+m}) \\ &\subset I_z + m_z^t \quad \text{für } i = 1, \dots, k_1, \end{aligned}$$

wobei $T_z^1 h$ das 1-te um z entwickelte Taylorpolynom von h ist.

$\sim \hat{D}_y(g_y) \in I_y$

$\sim$ Nach Bemerkung (2.4) gilt dann:

$\hat{D}$ induziert einen ∞ -Differentialoperator vom Grad m auf $U(x) \cap X$ □

Bemerkung 3.19.: Ist $I = \bigcap_{x \in X} m_x^t$, so brauchen wir in Bemerkung (3.18) nur Polynome P vom Grad $\leq (m-1)$ als Testfunktionen zu benutzen.

Beweis: trivial, wenn man den Beweisgang von Bemerkung (3.18) unter dieser Bedingung nachvollzieht. □

Die Bedeutung der Bemerkung (3.18) liegt in der Tatsache begründet, daß man die Invarianz des Ideals I nur noch an endlich vielen Monomen prüfen muß; d.h. genauer gesagt:

$$\left(\begin{array}{l} \textcircled{*} \left\{ \begin{array}{l} D \text{ induziert einen } \infty\text{-DO auf } X \text{ in } x \in X \\ \iff \\ \forall j \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } |j| \leq t+m-2 \quad \exists b_{ij}^1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n, x) \text{ für } i, j = 1, \dots, k_1, \\ \text{so daß } \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha (D^\alpha (x^j f_i))_x - \sum_{i=1}^{k_1} b_{ij}^1 (f_i)_x = 0 \text{ für } i=1, \dots, k_1 \\ \text{ist.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Wie schon in Bemerkung (2.11) gezeigt wurde, reicht die Invarianz des Ideals I zur Charakterisierung von Liftungen von Differentialoperatoren k -ten Grades über X nicht aus, Wir müssen daher zusätzlich fordern, daß

$$A_\alpha \in \bigcap_{x \in X} m_x^{|\alpha|-k} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } k < |\alpha| \leq k+t-1 \quad \text{ist.}$$

Damit man die Flachheit von $C^\infty(\mathbb{R}^n, X)$, als $C^\omega(\mathbb{R}^n, X)$ -Modul betrachtet, ausnutzen kann, muß man die A_α -Bedingung in eine algebraisierte Form mit reellanalytischen Koeffizienten umformulieren.

Dazu dient die folgende

Bemerkung 3.20.: $f \in \bigcap_{x \in X} m_x^p \iff f \in \bigcap_{x \in X} m_x^{p-1}, \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \bigcap_{x \in X} m_x^{p-1}$ für $i = 1, \dots, n$, wobei $p \geq 2$ vorausgesetzt wird.

Beweis: klar

□

Auf unser Problem zugeschnitten, können wir die A_α -Bedingung dann also in folgender Weise umformulieren:

Satz 3.21.: Es sind $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $k < |\alpha| \leq k+t-1$ die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) $A_\alpha \in N_X^{(|\alpha|-k)}$

(b) 1.Fall: $|\alpha|-k =: m \in M \leadsto$

$\exists$ Funktionskeime $\gamma_i^{(\alpha)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, X)$ für $i = 1, \dots, l_m$, so daß

$$** \left\{ A_\alpha - \sum_{i=1}^{l_m} \gamma_i^{(\alpha)} (h_i^m)_X \equiv 0 \right. \quad \text{bzw.}$$

2.Fall: $|\alpha|-k =: m+1 \notin M \leadsto m \in M \leadsto$

$\exists$ Funktionskeime $\gamma_i^{(\alpha)}, \gamma_{i,j}^{(\alpha)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, X)$ für $i = 1, \dots, l_m, j = 1, \dots, n$, so daß

$$** \left\{ \begin{aligned} A_\alpha - \sum_{i=1}^{l_m} \gamma_i^{(\alpha)} (h_i^m)_X &\equiv 0 \\ \sum_{i=1}^{l_m} \gamma_i^{(\alpha)} \left(\frac{\partial h_i^m}{\partial x_j} \right)_X - \sum_{i=1}^{l_m} \gamma_{i,j}^{(\alpha)} (h_i^m)_X &\equiv 0 \end{aligned} \right. \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

ist.

Beweis: Für den Fall $m := |\alpha| - k \in M$ folgt die im Satz behauptete Äquivalenz sofort aus Definition (3.16).

Sei also für die folgende Betrachtung :

$m+1 := |\alpha| - k \notin M \sim m \in M$

Dann gilt:

$$A_\alpha \in N_X^{(|\alpha|-k)}$$

$$\Leftrightarrow A_\alpha \in N_X^{(m)} ; \quad \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_j} \in N_X^{(m)} \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow \exists \gamma_i^{(\alpha)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, X) \quad \text{für } i = 1, \dots, l_m, \text{ so daß}$$

$$(1) \quad A_\alpha - \sum_{i=1}^{l_m} \gamma_i^{(\alpha)} (h_i^m)_X = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{l_m} \frac{\partial \gamma_i^{(\alpha)}}{\partial x_j} (h_i^m)_X = \sum_{i=1}^{l_m} \gamma_i^{(\alpha)} \left(\frac{\partial h_i^m}{\partial x_j} \right)_X \in N_X^{(m)} \\ \text{für } j = 1, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow \exists \gamma_i^{(\alpha)}, \gamma_{i,j}^{(\alpha)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, X) \quad \text{für } i = 1, \dots, l_m \text{ und } j = 1, \dots, n,$$

so daß

$$(1) \quad A_\alpha - \sum_{i=1}^{l_m} \gamma_i^{(\alpha)} (h_i^m)_X = 0$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{l_m} \gamma_i^{(\alpha)} \left(\frac{\partial h_i^m}{\partial x_j} \right)_X - \sum_{i=1}^{l_m} \gamma_{i,j}^{(\alpha)} (h_i^m)_X = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

Damit ist die Aussage des Satzes (3.21) vollständig bewiesen. □

Damit haben wir die nötigen beweistechnischen Hilfsmittel zur Verfügung, um den folgenden Hauptsatz zu beweisen.

Hauptsatz 3.22.: Sei $X = (\underline{X}, \underline{X}) = (X, (D^\infty(\mathbb{R}^n)|X)/I)$ ein (t) -regulärer ∞ -differenzierbarer Raum, der von reellanalytischem endlichen Typ ist.

Dann gilt :

Der $C^\infty(X, X)$ -Modul $\text{DIFF}_X^k(X, \infty)$ ist für alle $k \in \mathbb{N}_0$ endlich erzeugt !

Beweis: Statt der ∞ -DO auf X in $x \in X$ betrachten wir deren Liftungen .

~ Diese sind nach Bemerkung (2.11) durch die Invarianz des Ideals und durch die A_α -Bedingung eindeutig charakterisiert.

~ Da wir diese Bedingungen durch $(*)$ $(**)$ „algebraisiert“ haben, d.h. in eine Relationenbedingung mit reellanalytischen Koeffizienten umformuliert haben, folgt aus Bemerkung (3.15):

Die reellanalytischen Liftungen von Differentialoperatoren erzeugen die beliebig oft differenzierbaren.

~ Eingeschränkt auf X ergibt sich dann aus der Tatsache, daß der $C^\omega(X, x)$ -Modul $\text{DIFF}_X^k(\mathbb{X}, \omega)$ nach Satz (3.4) endlich erzeugt ist (wobei man $\mathbb{X}$ in diesem Fall als der entsprechende ω -differenzierbare Raum ist), die Behauptung.

□

Korollar 3.23.: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine reellanalytische Menge und $\mathbb{X} = (\underline{X}, \underline{X})$ der entsprechende reduzierte ∞ -differenzierbare Raum.

Dann gilt:

Ist X zusätzlich noch kohärent in $x \in X$ (im Sinne der Definition (3.9), S.94 in [9]), so ist der $C^\infty(X, x)$ -Modul $\text{DIFF}_X^k(\mathbb{X}, \infty) \forall k \in \mathbb{N}_0$ endlich erzeugt !

Beweis: Es gilt:

Beh.1.: Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ eine reellanalytische Menge, versehen mit der reduzierten ∞ -differenzierbaren Raumstruktur, und ist ferner

$N_X^\omega = \{f \in C^\omega(\mathbb{R}^n, x) \mid f \in N_X\}$ so sind die beiden folgenden Aussagen

äquivalent:

(a) X ist kohärent in $x \in X$

(b) $N_X = C^\infty(\mathbb{R}^n, x) \cap N_X^\omega$

Beweis: siehe Theorem (3.10), S.95, in [9]

□

Mit der Aussage dieser Behauptung (1) ist $\mathbb{X}$ von reellanalytischem endlichen Typ und damit folgt sofort aus Hauptsatz (3.22) die Aussage dieses Korollars.

□

Beispiel 3.24.: Seien die folgenden Mengen $X \subset \mathbb{R}^2$ jeweils mit der reduzierten ∞ -differenzierbaren Raumstruktur versehen.

Dann gilt:

- (a) $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^p = y^q; p, q \text{ teilerfremd}\}$
 $\sim \forall k \in \mathbb{N}$ ist der $C^\infty(X, (0,0))$ -Modul $\text{DIFF}_{(0,0)}^k(X, \infty)$ endlich erzeugt!
- (b) $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y(y-x^n) = 0\}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ ist.
 $\sim \forall k \in \mathbb{N}$ ist der $C^\infty(X, (0,0))$ -Modul $\text{DIFF}_{(0,0)}^k(X, \infty)$ endlich erzeugt!

Beweis: Da $\forall (x,y) \in X$ die Beziehungen

- (a) $N_{(x,y)} = \langle x^p - y^q \rangle_{C^\infty(\mathbb{R}^2, (x,y))}$
 (b) $N_{(x,y)} = \langle y(y-x^n) \rangle_{C^\infty(\mathbb{R}^2, (x,y))}$

gelten, so sind die vorliegenden ∞ -differenzierbaren Räume von reellanalytischem endlichen Typ, so daß aus Hauptsatz (3.22) trivialerweise die Behauptung folgt. □

Beispiel 3.25.: Sei X der in Beispiel (3.17)(c) definierte reduzierte ∞ -differenzierbare Raum.

Dann gilt:

- (a) X ist nicht von reellanalytischem endlichen Typ .
 (b) $\forall k \in \mathbb{N}$ ist der $C^\infty(X, (0,0))$ -Modul $\text{DIFF}_{(0,0)}^k(X, \infty)$ endlich erzeugt !

Beweis: (a) folgt aus Beispiel (3.17)(c)

(b) siehe Untersuchungen im fünften Paragraphen □

Wie uns das letzte Beispiel zeigt, kann es durchaus Mengen geben, die nicht von reellanalytischem endlichen Typ sind und deren Module $\text{DIFF}_x^k(X, \infty)$ dennoch endlich erzeugt sind.

Interessanter ist diese Fragestellung noch auf reellanalytischen Mengen. Leider existieren ja reellanalytische Mengen, die nicht kohärent sind, wie das Beispiel der „Cartanschen Umbrella“ .

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2+y^2) = x^3\}$$

zeigt.

Dennoch werden wir für die Differentialoperatoren erster Ordnung auf dieser Menge zeigen, daß der Modul $\text{DIFF}_{(0,0,0)}^1(X,\infty)$ endlich erzeugt ist, und daß die Erzeugenden so gewählt werden können, daß sie reell-analytische Koeffizienten besitzen (siehe Untersuchungen im vierten Paragraphen).

Daher bleibt an dieser Stelle neben dem schon in der Einleitung angesprochenen „Malgrangschen Problem“ für ∞ -Differentialoperatoren die Frage offen, unter welchen Bedingungen, möglichst geometrisch-topologischer Art, der $C^\infty(X,x)$ -Modul $\text{DIFF}_x^k(X,\infty)$ endlich erzeugt ist ?

§ 4 Abschätzung der Minimalanzahl der Erzeugenden von $\text{DIFF}_X^k(X, N)$ in Spezialfällen

In diesem Paragraphen wollen wir uns eingehender mit der Minimalanzahl der Erzeugenden des Moduls $\text{DIFF}_X^k(X, N)$ beschäftigen.

Da wir im dritten Paragraphen im Falle $N = \infty$ gezeigt haben, daß dieser Modul nicht immer endlich erzeugt ist und man im allgemeinen Fall überhaupt keine Chance hat, Größenabschätzungen anzugeben, werden wir uns bei dieser Betrachtung auf Mengen beschränken, die „leicht“ zu handhaben und deren „Singularitäten“ zwar isoliert, aber hinreichend nicht „regulär“ sind; dies sind die Mengen

$$X_{p,q} := \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \mid y^q = x^p\} \quad , \quad p, q \text{ teilerfremd !}$$

Für diese Mengen, versehen mit der jeweiligen reduzierten Raumstruktur, werden wir zeigen, daß die Minimalanzahl der Erzeugenden des Moduls $\text{DIFF}_0^k(X_{p,q}, N)$ sich durch die Dimension des k -ten Tangentialraums an $X_{p,q}$ in $0 \in X_{p,q}$ plus Eins abschätzen läßt.

Dies ist auf den ersten Blick kein überraschendes Ergebnis, da zum Beispiel die Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten diese Eigenschaft haben. Durch diese Ergebnisse angeregt, könnte man vermuten, daß zum Beispiel die Differentialoperatoren auf algebraischen Mengen, für die der obige Modul endlich erzeugt ist, die obige Abschätzung richtig ist. Wie allerdings die Untersuchung der Differentialoperatoren ersten Grades auf der „Cartanschen Umbrella“ zeigen werden, ist dies nicht immer erfüllt.

Kommen wir als erstes zur Definition des k -Tangentialraums, bei dem wir den von Grothendieck in Spezialfällen und von Spallek in [16] im allgemeinen Fall geprägten Begriff verwenden.

Definition 4.1.: Sei $X \subset \mathbb{K}^n$ und $l(n, k) := \binom{n+k}{k} - 1$ für $k \in \mathbb{N}$.

$$(a) \quad T^k X := \{(x, y) \mid x \in X, y \in \mathbb{K}^{l(n, k)}, \sum_{|\nu|=1}^k f^{(\nu)}(x) y_\nu = 0 \quad \forall f \in N_X\}$$

heißt k -ter Tangentialraum an X .

- (b) $T_x^k X := p_2 \bullet (T_x^k |_{\{x\} \times K} l(n,k))$ heißt k -ter Tangentialraum an X im Punkte $x \in X$, wobei p_2 die kanonische Projektion auf die y -Komponenten von $T_x^k X$ ist.

An dieser Stelle sei angemerkt, daß man mit Hilfe dieser Definition nun in der Lage ist, in kanonischer Weise Tangentialvektorfelder höherer Ordnung an X zu definieren. Da man aus jedem Tangentialvektorfeld in kanonischer Weise einen Differentialoperator und umgekehrt machen kann, so sind die beiden „Theorien“ äquivalent. Interessant wäre es, ähnliche Aussagen wie den „Satz von Frobenius“ für Vektorfelder höherer Ordnung zu beweisen, weil dadurch vielleicht die Möglichkeit bestünde, durch Umformulierungen wieder Bedingungen für die Lösbarkeit bestimmter partieller Differentialgleichungen anzugeben, wie man sie zum Beispiel auf Mannigfaltigkeiten für Vektorfelder 1-ten Grades kennt (siehe Hicks „Notes on Differential Geometry“).

Kommen wir nun wieder zu unser ursprünglichen Aufgabenstellung zurück. Da wir den Modul der Differentialoperatoren auf $X_{p,q}$ näher untersuchen wollen, werden wir als erstes die Dimension des k -ten Tangentialraums an $X_{p,q}$ berechnen.
Es gilt:

Bemerkung 4.2.: Sei $X_{p,q}$ wie oben definiert, $q < p$ und p, q teilerfremd. Dann folgt:

- (a) Für $(x,y) \in X_{p,q}$ mit $(x,y) \neq (0,0)$ ist

$$\dim (T_{(x,y)}^k X_{p,q}) = k$$

- (b) Für $(x,y) = (0,0)$ ist

$$\dim (T_{(0,0)}^k X_{p,q}) = \begin{cases} \frac{1}{2} k(k+3) & \text{für } k < q \\ \frac{1}{2} [k(k+3) - (k-q+1)(k-q+2)] & \text{für } k \geq q \end{cases}$$

Beweis: Mit $D^{i,j} = \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}$ gilt :

Beh. 1.: Für Funktionen $h, g \in C^N(\mathbb{K}^2)$ mit $h(x, y) = g(x, y)(y^q - x^p)$ gilt:

$$\begin{aligned} (D^{i,j}h)(x, y) &= (D^{i,j}g)(x, y) (y^q - x^p) \\ &+ \sum_{\mu=1}^q \binom{j}{\mu} \frac{q!}{(q-\mu)!} y^{q-\mu} (D^{i,j-\mu}g)(x, y) \\ &- \sum_{\nu=1}^p \binom{i}{\nu} \frac{p!}{(p-\nu)!} x^{p-\nu} (D^{i-\nu,j}g)(x, y) \quad , \end{aligned}$$

wobei $(D^{n,l}g) := 0$, falls $n < 0$ oder $l < 0$ ist.

Beweis: siehe Behauptung 2 des Hauptsatzes (6.3) in [10]

Beh. 2.: Für $(x, y) \in X_{p,q}$ und $z := (z_{10}, z_{01}, z_{20}, \dots, z_{0k}) \in T_{(x,y)}^k X_{p,q}$

ergibt sich mit den Bezeichnungen von Behauptung (1) :

$$\sum_{0 \leq n+l \leq k} (D^{n,l}g)(x, y) \left\{ \sum_{j=1}^{q+1} \binom{j}{j-1} \frac{q!}{(q+1-j)!} y^{q+1-j} z_{nj} - \sum_{i=n}^{p+n} \binom{i}{i-n} \frac{p!}{(p+n-i)!} x^{p+n-i} z_{i1} \right\} = 0 \quad ,$$

wobei $z_{st} := 0$ für $s+t > k$ ist.

Beweis: Mit den Bezeichnungen von Behauptung (1) gilt nach Definition des k -ten Tangentialraums an $X_{p,q}$ in $(x, y) \in X_{p,q}$:

$$\sum_{0 \leq i+j \leq k} (D^{i,j}h)(x, y) z_{ij} = 0$$

~ Nach Behauptung (1) ergeben sich als Koeffizienten von $(D^{n,l}g)(x, y)$:

(a) Für $j = 1, \dots, q+1$:

$$\binom{j}{j-1} \frac{q!}{(q+1-j)!} y^{q+1-j} z_{nj}$$

(b) Für $i = n, \dots, p+n$

$$- \binom{i}{i-k} \frac{p!}{(p+n-i)!} x^{p+n-i} z_{i1} \quad ,$$

wobei $z_{st} = 0$ für $s+t > k$ ist.

~ Summiert man nun die einzelnen Koeffizienten auf, so ergibt sich die obige Behauptung.

1.Fall : Für $(x,y) \in X_{p,q}$ mit $(x,y) \neq (0,0)$ gilt:

Um (x,y) ist $X_{p,q}$ lokal eine eindimensionale Mannigfaltigkeit

$\sim T_{(x,y)}^k X_{p,q}$ ist ein k -dimensionaler Vektorraum

2.Fall: Für $(x,y) = (0,0) \in X_{p,q}$ gilt :

$$\sum_{0 \leq n+l \leq k} (D^{n,l}g)(0,0) \left\{ \frac{(q+1)!}{l!} z_{n(q+1)} - \frac{(p+n)!}{n!} z_{(p+n)l} \right\} = 0 ,$$

wobei $z_{st} := 0$ für $s+t > k$ ist.

$\sim$ Da g beliebig gewählt werden kann, muß

$$\frac{(q+1)!}{l!} z_{n(q+1)} = \frac{(p+n)!}{n!} z_{(p+n)l} \quad \text{für } n+l+q \leq k \quad \text{sein.}$$

$\sim$ Unterscheidet man im folgenden die Fälle

(a) $k < q < p$

$\sim$ Die Anzahl der $(n,l) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit $n+l \leq k-q < 0$ ist Null !

$$\begin{aligned} \sim \dim T_{(0,0)}^k X_{p,q} &= 2 + 3 + \dots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} - 1 \\ &= \frac{k(k+3)}{2} \end{aligned}$$

(b) $k \geq q$

$\sim$ Die Anzahl der $(n,l) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit $n+l \leq k-q$ ist gleich $\frac{(k-q+1)(k-q+2)}{2} !$

$\sim$ Da dies auch die Anzahl der unabhängigen Bedingungen-
gleichungen ist, folgt :

$$\dim T_{(0,0)}^k X_{p,q} = \frac{(k+3)k}{2} - \frac{(k-q+1)(k-q+2)}{2}$$

so ist damit die Behauptung vollständig bewiesen . □

Bemerkung 4.3.: Die Dimension des k -ten Tangentialraums von $X_{p,q}$ in $(x,y) \in X_{p,q}$ ist nur vom $\min \{p,q\}$, nicht aber vom $\max \{p,q\}$ abhängig !

Beweis: siehe Bemerkung (4.2) □

Bemerkung 4.4.: Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von Bemerkung (4.2) gilt:

(a) Für $(x,y) \in X_{p,q}$ mit $(x,y) \neq 0$ ist

$$\dim T_{(x,y)}^{k+1} X_{p,q} - \dim T_{(x,y)}^k X_{p,q} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(b) Für $(x,y) = (0,0) \in X_{p,q}$ ist

$$\dim T_{(0,0)}^{k+1} X_{p,q} - \dim T_{(0,0)}^k X_{p,q} = \begin{cases} k+2 & \text{für } k+1 < q \\ q & \text{für } k+1 \geq q \end{cases}.$$

Beweis: (a) klar

(b) Da für

$$(1) \quad k+1 < q : \dim T_{(0,0)}^{k+1} X_{p,q} - \dim T_{(0,0)}^k X_{p,q} = \frac{(k+1)(k+4)}{2} - \frac{k(k+3)}{2} \\ = k+2$$

$$(2) \quad k+1 = q : \dim T_{(0,0)}^q X_{p,q} - \dim T_{(0,0)}^{q-1} X_{p,q} = \frac{q(q+3)}{2} - \frac{1 \cdot 2}{2} \\ - \frac{(q-1)(q+2)}{2} = q$$

$$(3) \quad k+1 > q : \dim T_{(0,0)}^{k+1} X_{p,q} - \dim T_{(0,0)}^k X_{p,q} \\ = \frac{(k+1)(k+4) - (k-q+2)(k-q+3)}{2} - \frac{k(k+3) - (k-q+1)(k-q+2)}{2} \\ = q$$

ist, folgt die Behauptung. $\square$

Kommen wir nun zu dem für die folgende Betrachtung entscheidenden

Satz 4.5.: Sei $X_{p,q} \subset \mathbb{K}^2$ mit $q < p$ wie oben definiert und mit der reduzierten N-differenzierbaren Raumstruktur versehen.

Ferner sei

$$D = \sum_{0 \leq i+j \leq k} a_{i,j} D^{i,j} : C^N(U(0,0)) \rightarrow C^N(U(0,0))$$

Liftung eines Differentialoperators k-ter Ordnung auf $X_{p,q}$ in einer Umgebung $U(0,0) \subset \mathbb{K}^2$.

Dann gilt für $(x,y) \in X_{p,q}$ mit $(x,y) \neq (0,0)$

$$a_{k-1-n,n}(x,y) = \sum_{i=0}^1 a_{k-i,0}(x,y) \left(\frac{y}{x}\right)^n x^{-(1-i)} \cdot c_{k-i}^{k-1-n,n},$$

wobei (1) $l = 0, \dots, k-1$; $n = 1, \dots, k-1$

$$(2) \quad c_{k-i}^{k-1-n,n} \in \mathbb{R} \quad \forall n, l, i \quad \text{ist.}$$

Beweis: Es gilt :

Beh.1.: $\forall (x,y) \in X_{p,q} \cap U(0,0)$ und $\forall (t,s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ist

$$\sum_{\mu=1}^q \binom{s+\mu}{\mu} \frac{q!}{(q-\mu)!} y^{q-\mu} a_{t,s+\mu}(x,y) - \sum_{v=1}^p \binom{t+v}{v} \frac{p!}{(p-v)!} x^{p-v} a_{t+v,s}(x,y) = 0,$$

wobei man $a_{i,j} = 0$ für $i+j > k$ setzt .

Beweis: siehe Hauptsatz (6.3), S.58, in [10]

Wir führen den Beweis von Satz (4.5) durch Induktion über $l=0, \dots, k-1$!

I.A.: $l = 0$

Aus der Darstellung der $a_{i,j}$ in Behauptung (1) folgt :

$$a_{k-n,n}(x,y) = \binom{k}{n} \left(\frac{p}{q}\right)^n \left(\frac{y}{x}\right)^n a_{k,0}(x,y)$$

~ Mit $c_k^{k-n,n} := \binom{k}{n} p^n q^{-n}$ für $n = 0, \dots, k$ folgt die Aussage des

Induktionsanfangs !

I.S.: $l \rightarrow (l+1)$ (wobei $(l+1) \leq (k-1)$)

Aus der Darstellung der $a_{i,j}$ in Behauptung (1) folgt :

$$a_{k-(l+1)-n,n}(x,y) = a_{k-l-n-1,n}(x,y)$$

$$= \frac{k-l-n}{n} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{y}{x} \cdot a_{k-l-n,n-1}(x,y)$$

$$- \sum_{\mu=0}^{\min\{l,q-2\}} \binom{n+\mu+1}{\mu+2} \frac{(q-1)!}{(q-\mu-2)!} \frac{1}{n} y^{-\mu-1} a_{k-l-n-1,n+1+\mu}(x,y)$$

$$+ \sum_{v=0}^{\min\{l,p-2\}} \binom{k-l-n+v+1}{v+2} \frac{p!}{(p-v-2)!q} \frac{y}{n} x^{-v-2} a_{k-l-n+v+1,n-1}(x,y)$$

$$= \frac{k-l-n}{n} \frac{p}{q} \frac{y}{x} a_{k-l-n,n-1}(x,y)$$

$$+ \frac{1}{n} \left(\frac{y}{x}\right)^n \left\{ \sum_{v=0}^{\min\{l,p-2\}} \binom{k-l-n+v+1}{v+2} \frac{p!}{q(p-v-2)!} \sum_{i=0}^{l-v} c_{k-i}^{k-l-n+v+1,n-1} \frac{a_{k-i,0}(x,y)}{x^{l+1-i}} \right. \\ \left. - \sum_{\mu=0}^{\min\{l,q-2\}} \binom{n+\mu+1}{\mu+2} \frac{(q-1)!}{(q-\mu-2)!} \sum_{i=0}^{l-\mu} c_{k-i}^{k-l-n-1,n+1+\mu} \frac{a_{k-i,0}(x,y)}{x^{l+1-i}} \right\}$$

~ Da diese Darstellung für alle $n = 1, \dots, k-(l+1)$ gilt, folgt mit Induktion über n und sukzessives Einsetzen der Induktionsschluß !

□

Mit Hilfe dieser Aussage können wir nun einen der zentralen Sätze in diesem Paragraphen beweisen.

Hauptsatz 4.6.: Sei $X_{p,q}$ wie oben definiert und mit der reduzierten N -differenzierbaren Raumstruktur versehen.

Ferner sei $d^k :=$ Minimalanzahl von Erzeugenden des $C^N(X_{p,q}, (0,0))$ -Moduls $\text{DIFF}_{(0,0)}^k(X_{p,q}, N)$.

Dann gilt:

$$d^k \leq \dim T_{(0,0)}^k X_{p,q} + 1$$

Beweis: Wir zeigen diese Behauptung durch Induktion über $k \in \mathbb{N}$.

I.A.: $k = 1$

Da $a_{0,1}(x,y) = \frac{p}{q} \frac{y}{x} a_{1,0}(x,y)$ gelten muß, folgt trivialerweise sofort die Behauptung !

I.S.: $k \rightarrow (k+1)$

~ Dabei müssen wir die folgenden Fälle unterscheiden:

(1) $(k+1) < q$

~ Da es bei der Betrachtung von $\text{DIFF}_{(0,0)}^{k+1}(X_{p,q}, N)$ modulo $\text{DIFF}_{(0,0)}^k(X_{p,q}, N)$ nur auf die Koeffizienten $a_{k+1,0}$ ankommt, gilt:

Da die höchste x -Potenz, die im Nenner bei der Darstellung von Satz (4.5) auftaucht, x^{k+1} ist, haben die möglichen Koeffizienten $a_{k+1,0}$ die folgende Form (bis auf Multiplikation mit C^N -Funktionen auf $X_{p,q}$):

$$x^t, y^{s_1} x^{t-1}, y^{s_2} x^{t-2}, \dots; y^{s_{t-1}} x^1, y^{s_t},$$

wobei $t \in \mathbb{N}$ mit $t \leq k+1$ und $t, s_1, \dots, s_t \in \mathbb{N}_0$ minimal gewählt wurden unter der Bedingung, daß damit die

$a_{k+1-l-n,n} \in C^N(X_{p,q}, (0,0))$ sind.

$$\sim d^{k+1} - d^k \leq t + 1 \leq k + 2 = \dim T_{(0,0)}^{k+1} X_{p,q} - \dim T_{(0,0)}^k X_{p,q}$$

$\sim$ Nach Induktionsvoraussetzung ist dann

$$\begin{aligned} d^{k+1} &\leq d^k + \dim T_{(0,0)}^{k+1} X_{p,q} - \dim T_{(0,0)}^k X_{p,q} \\ &\leq \dim T_{(0,0)}^{k+1} X_{p,q} + 1 \end{aligned}$$

(2) $(k+1) \geq q$

$\sim$ Da es bei der Betrachtung von $\text{DIFF}_{(0,0)}^{k+1}(X_{p,q}, N)$ modulo $\text{DIFF}_{(0,0)}^k(X_{p,q}, N)$ nur auf die Koeffizienten $a_{k+1,0}$ ankommt, gilt:

Da $y^q = x^p$ ist, haben die möglichen Koeffizienten $a_{k+1,0}$ die folgende Form (bis auf Multiplikation mit C^N -Funktionen auf $X_{p,q}$):

$$x^{s_0} ; y x^{s_1} ; y^2 x^{s_2} ; \dots ; y^{q-1} x^{s_{q-1}} \quad , \text{ wobei}$$

$s_0, s_1, \dots, s_{q-1} \in \mathbb{N}_0$ minimal gewählt wurde unter der Bedingung, daß damit die Funktionen

$a_{k+1-l-n,n} \in C^N(X_{p,q}, (0,0))$ sind .

$$\sim d^{k+1} - d^k \leq q = \dim T_{(0,0)}^{k+1} X_{p,q} - \dim T_{(0,0)}^k X_{p,q}$$

$\sim$ Nach Induktionsvoraussetzung ist dann

$$\begin{aligned} d^{k+1} &\leq d^k + \dim T_{(0,0)}^{k+1} X_{p,q} - \dim T_{(0,0)}^k X_{p,q} \\ &\leq \dim T_{(0,0)}^{k+1} X_{p,q} + 1 \end{aligned}$$

Damit ist Hauptsatz (4.6) vollständig bewiesen .

□

Bemerkung 4.7.: Ist mit den in Hauptsatz (4.6) benutzten Bezeichnungen $X_{p,q}$ eine eindimensionale Mannigfaltigkeit, so gilt sogar :

$$d^k = \dim T_{(0,0)}^k X_{p,q} + 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Es kann allerdings auch der Fall eintreten, daß ab einem bestimmten $k_0 \in \mathbb{N}$ in der Abschätzung des Hauptsatzes (4.6) sogar immer „kleiner“ gilt, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 4.8.: Sei $X_{5,4}$ wie oben definiert und mit der reduzierten N-differenzierbaren Raumstruktur versehen.

Dann gilt mit den Bezeichnungen von Hauptsatz (4.6) :

$$(a) \ d^1 = 3 = \dim T_{(0,0)}^1 X_{5,4} + 1$$

$$(b) \ d^2 = 6 = \dim T_{(0,0)}^2 X_{5,4} + 1$$

$$(c) \ d^3 = 9 < \dim T_{(0,0)}^3 X_{5,4} + 1$$

$$(d) \ d^k < \dim T_{(0,0)}^k X_{5,4} + 1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geq 3$$

Beweis: (a) Nach der Behauptung (1) des Satzes (4.5) muß für die Koeffizienten der Differentialoperatoren 1. Grades gelten :

$$4 y^3 a_{0,1}(x,y) - 5 x^4 a_{1,0}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in X_{5,4} \cap U(0,0)$$

~ Die Differentialoperatoren 1. Grades werden dann durch

$$D_0 := 1$$

$$D_1^1 := 4 x D^{1,0} + 5 y D^{0,1}$$

$$D_1^2 := 4 y^3 D^{1,0} + 5 x^4 D^{0,1}$$

über $C^N(X_{5,4}, (0,0))$ aufgespannt.

$$\sim d^1 = 3 = \dim T_{(0,0)}^1 X_{5,4} + 1$$

(b) Nach der Behauptung (1) des Satzes (4.5) muß für die Koeffizienten der Differentialoperatoren 2. Ordnung gelten:

$$4y^3 a_{0,1}(x,y) + 12y^2 a_{0,2}(x,y) - 5x^4 a_{1,0}(x,y) - 20x^3 a_{2,0}(x,y) = 0$$

$$4y^3 a_{1,1}(x,y) - 10x^4 a_{2,0}(x,y) = 0$$

$$8y^3 a_{0,2}(x,y) - 5x^4 a_{1,1}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in X_{5,4} \cap U(0,0)$$

~ Die Differentialoperatoren 2. Grades werden dann durch

$$D_0, D_1^1, D_1^2 \text{ und}$$

$$D_2^1 := 16x^2 D^{2,0} + 40xy D^{1,1} + 25y^2 D^{0,2} + 5y D^{0,1}$$

$$D_2^2 := 16y^3 D^{2,0} + 40x^4 D^{1,1} + 25x^3 y D^{0,2} + 5x^3 D^{0,1}$$

$$D_2^3 := 16xy^2 D^{2,0} + 40y^3 D^{1,1} + 25x^4 D^{0,2} - 4y^2 D^{1,0}$$

über $C^N(X_{5,4}, (0,0))$ aufgespannt.

$$\sim d^2 = 6 = \dim T_{(0,0)}^2 X_{5,4} + 1$$

(c) Nach der Behauptung (1) des Satzes (4.5) muß für die Koeffizienten der Differentialoperatoren 3. Ordnung gelten:

$$(1) \quad 4y^3 a_{0,1}(x,y) + 12y^2 a_{0,2}(x,y) + 24y a_{0,3}(x,y) - 5x^4 a_{1,0}(x,y) - 20x^3 a_{2,0}(x,y) - 60x^2 a_{3,0}(x,y) = 0$$

$$(2) \quad 4y^3 a_{1,1}(x,y) + 12y^2 a_{1,2}(x,y) - 10x^4 a_{2,0}(x,y) - 60x^3 a_{3,0}(x,y) = 0$$

$$(3) \quad 8y^3 a_{0,2}(x,y) + 36y^2 a_{0,3}(x,y) - 5x^4 a_{1,1}(x,y) - 20x^3 a_{2,1}(x,y) = 0$$

$$(4) \quad 4y^3 a_{2,1}(x,y) - 15x^4 a_{3,0}(x,y) = 0$$

$$(5) \quad 8y^3 a_{1,2}(x,y) - 10x^4 a_{2,1}(x,y) = 0$$

$$(6) \quad 12y^3 a_{0,3}(x,y) - 5x^4 a_{1,2}(x,y) = 0$$

~ Für $(x,y) \in X_{5,4} \cap U(0,0)$ mit $(x,y) \neq (0,0)$ ergibt sich nach kurzer Umformung :

$$(1) \quad a_{0,1}(x,y) = \frac{5}{4} \frac{y}{x} a_{1,0}(x,y) + \frac{5}{16} y x^{-2} a_{2,0}(x,y) - \frac{15}{64} y x^{-3} a_{3,0}(x,y)$$

$$(2) \quad a_{1,1}(x,y) = \frac{5}{2} \frac{y}{x} a_{2,0}(x,y) + \frac{15}{16} y x^{-2} a_{3,0}(x,y)$$

$$(3) \quad a_{0,2}(x,y) = \frac{25}{16} y^2 x^{-2} a_{2,0}(x,y) + \frac{75}{64} y^2 x^{-3} a_{3,0}(x,y)$$

$$(4) \quad a_{2,1}(x,y) = \frac{15}{4} y x^{-1} a_{3,0}(x,y)$$

$$(5) \quad a_{1,2}(x,y) = \frac{75}{16} y^2 x^{-2} a_{3,0}(x,y)$$

$$(6) \quad a_{0,3}(x,y) = \frac{125}{64} y^3 x^{-3} a_{3,0}(x,y)$$

~ Da nach dem Induktionsschritt des Hauptsatzes (4.6) die Koeffizienten von $D^{3,0}$ der Erzeugenden der Differentialoperatoren 4. Ordnung die Form x^t ; $x^{t-1} y^{s_1}$; ... ; $x y^{s_{t-1}}$; y^{s_t} haben, wobei $t \leq 3$ und $s_1, \dots, s_t \in \mathbb{N}_0$ minimal mit dieser Eigenschaft gewählt werden, folgt nach kurzer Zwischenrechnung :

$$t = 3 \quad ; \quad s_1 = 1 \quad ; \quad s_2 = 3 \quad ; \quad s_3 = 3$$

~ Da $x y^{s_2} = x y^3 = x (y^{s_3})$ ist, werden die Differentialoperatoren 3. Grades dann durch

$$D_0, D_1^1, D_1^2, D_2^1, D_2^2, D_2^3 \quad \text{und}$$

$$D_3^1 := 64x^3 D^{3,0} + 240yx^2 D^{2,1} + 300y^2 x D^{1,2} + 125y^3 D^{0,3} + 60yx D^{1,1} + 75y^2 D^{0,2} - 15y D^{0,1}$$

$$\begin{aligned}
 D_3^2 &:= 64x^2y D^{3,0} + 240xy^2 D^{2,1} + 300y^3 D^{1,2} + 125x^4 D^{0,3} \\
 &\quad - 48xy D^{2,0} - 60y^2 D^{1,1} + 24y D^{1,0} \\
 D_3^3 &:= 64y^3 D^{3,0} + 240x^4 D^{2,1} + 300x^3y D^{1,2} + 125x^2y^2 D^{0,3} \\
 &\quad + 60x^3 D^{1,1} + 75x^2y D^{0,2} - 15x^2 D^{0,1}
 \end{aligned}$$

über $C^N(X_{5,4}, (0,0))$ aufgespannt.

$$\sim d^3 = 9 < 10 = \dim T_{(0,0)}^3 X_{5,4} + 1$$

(d) Nach dem Beweis des Hauptsatzes (4.6) gilt :

$$d^{k+1} - d^k \leq \dim T_{(0,0)}^{k+1} X_{5,4} - \dim T_{(0,0)}^k X_{5,4} \quad \text{für } k \geq 3$$

$$\begin{aligned}
 \sim d^{k+1} - \dim T_{(0,0)}^{k+1} X_{5,4} &\leq d^k - \dim T_{(0,0)}^k X_{5,4} \\
 &\leq d^3 - \dim T_{(0,0)}^3 X_{5,4} \\
 &< 1 \quad \text{für } k \geq 3
 \end{aligned}$$

$$\sim d^k < \dim T_{(0,0)}^k X_{5,4} \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geq 3 !$$

□

Nun könnte man, wie in der Einleitung zu diesem Paragraphen schon erwähnt, der Meinung sein, daß diese Abschätzung nicht nur für die Mengen $X_{p,q}$, sondern zum Beispiel für alle algebraischen Mengen des $\mathbb{K}^n$ gilt. Um zu zeigen, daß diese Vermutung leider nicht der Wahrheit entspricht, werden wir im folgenden die Differentialoperatoren ersten Grades auf der „Cartanschen Umbrella“ betrachten. ($N := \infty, \omega$)

Zu diesem Zwecke sei für die folgende Betrachtung :

$$X := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2 + y^2) = x^3\}$$

$$X_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^3(x^2 + y^2)^{-1} \text{ und } x^2 + y^2 > 0\}$$

$$X_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$$

Bemerkung 4.9.: Es gilt :

(a) X ist eine algebraische Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ mit $X = X_1 \cup X_2$

(b) X ist nicht kohärent !

(c) Definiert man $Y := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < z^2\}$, so gilt :
 $(Y \cup \{(0,0,0)\}) \cap X = X_2$

Beweis: (a),(b) klar !

(c) Sei $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit $(x,y,z) \in X \cap Y$

$\sim$ Es gilt :

$$(1) x^2 + y^2 < z^2$$

$$(2) z(x^2 + y^2) = x^3$$

$\sim$ O.E. sei $z > 0 \quad \sim \quad x \geq 0$

$\sim$ Aus (1) folgt dann : $x < z$

Aus (2) folgt dann : $z = x^3 (x^2 + y^2)^{-1} \leq x^3 x^{-2} = x$ für $x^2 + y^2 > 0$

$\sim x^2 + y^2 = 0$

$\sim (Y \cup \{(0,0,0)\}) \cap X = X_2$

□

Um später Differentialoperatoren auf X betrachten zu können, haben wir die „Cartansche Umbrella“ in die beiden Mengen X_1 und X_2 aufgespalten. Da man eigentlich nur Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten richtig beherrscht, ist die Aufspaltung so vorgenommen worden, daß, wie die folgende Bemerkung zeigt, zumindestens X_1 eine Mannigfaltigkeit ist.

Bemerkung 4.10.: Es gilt :

(a) X_1 ist eine zweidimensionale N -differenzierbare Mannigfaltigkeit !

(b) $\varphi : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow X_1$

$$(x,y) \rightarrow (x,y, \frac{x^3}{x^2 + y^2})$$

ist eine globale Kartenabbildung von X_1 .

(c) Die Differentialoperatoren ersten Grades auf X_1 werden durch

$$\hat{D}_0^1 := 1$$

$$\hat{D}_1^1 := D^{1,0,0} + x^2 \frac{(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2} D^{0,0,1} = D^{1,0,0} + \frac{3x^2 - 2xz}{x^2 + y^2} D^{0,0,1}$$

$$\hat{D}_1^2 := D^{0,1,0} - \frac{2yz}{x^2 + y^2} D^{0,0,1}$$

über den jeweiligen N -differenzierbaren Funktionen erzeugt .

Beweis: (a),(b) klar

(c) Nach der Konstruktion in § 5 von [10] gilt für die Differentialoperatoren 1. Grades auf X_1 :

$$\hat{D}_0^1 := 1$$

$$\hat{D}_1^1 := D^{1,0,0} + \frac{\partial \varphi^3}{\partial x}(x,y) D^{0,0,1}$$

$$\hat{D}_1^2 := D^{0,1,0} + \frac{\partial \varphi^3}{\partial y}(x,y) D^{0,0,1} \quad , \text{ wobei } \varphi := (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3) \text{ ist,}$$

sind die Erzeugenden von $\text{DIFF}_{(0,0,0)}^1(X_1, \mathbb{N})$.

~ Da

$$\frac{\partial \varphi^3}{\partial x} = x^2 \frac{(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi^3}{\partial y} = - \frac{2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{ist, folgt sofort}$$

die Behauptung. □

Nun ist es allerdings nicht unser Ziel, die Differentialoperatoren auf X_1 näher zu betrachten, sondern wir wollen ja die auf X existierenden klassifizieren.

Dies werden wir im folgenden so machen, daß wir die auf X_1 definierten Differentialoperatoren suchen, die sich auf X fortsetzen lassen.

Bemerkung 4.11.: Es gilt :

$$(a) D_1^1 := x^2 D^{1,0,0} + (3xz - 2z^2) D^{0,0,1}$$

$$(b) D_1^2 := y^2 D^{1,0,0} + (3x^2 - 5xz + 2z^2) D^{0,0,1}$$

$$(c) D_1^3 := xy D^{0,1,0} + (2z^2 - 2xz) D^{0,0,1}$$

$$(d) D_1^4 := x^3 D^{0,1,0} - 2yz^2 D^{0,0,1}$$

$$(e) D_1^5 := (x^2 + y^2) D^{0,1,0} - 2yz D^{0,0,1}$$

$$(f) D_1^6 := y^3 D^{0,1,0} + (4x^2 z - 2x^3 - 2xz^2) D^{0,0,1}$$

$$(g) D_1^7 := yz D^{1,0,0} + \left(\frac{3}{2} x^2 - xz\right) D^{0,1,0}$$

$$(h) D_1^8 := x D^{1,0,0} + y D^{0,1,0} + z D^{0,0,1}$$

$$(i) D_1^9 := xy D^{1,0,0} - x^2 D^{0,1,0} + 3yz D^{0,0,1}$$

sind Differentialoperatoren 1. Ordnung auf X !

Beweis: Da auf X_1

$$(a) \ x^2 \frac{\partial \varphi^3}{\partial x} = x^2 \frac{x^2(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{3x^6 + 3x^4y^2 - 2x^6}{(x^2 + y^2)^2} = 3x \frac{x^3}{x^2 + y^2} - 2 \frac{x^6}{(x^2 + y^2)^2} = 3xz - 2z^2$$

$$(b) \ y^2 \frac{\partial \varphi^3}{\partial x} = \frac{3x^2(x^2 + y^2)^2 - 5x^4(x^2 + y^2) + 2x^6}{(x^2 + y^2)^2} = 3x^2 - 5xz + 2z^2$$

$$(c) \ xy \frac{\partial \varphi^3}{\partial y} = - \frac{2x^4y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^6}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2x^4(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 2z^2 - 2xz$$

$$(d) \ x^3 \frac{\partial \varphi^3}{\partial y} = -2yz \frac{x^3}{(x^2 + y^2)} = -2yz^2$$

$$(e) \ (x^2 + y^2) \frac{\partial \varphi^3}{\partial y} = -2yz$$

$$(f) \ y^3 \frac{\partial \varphi^3}{\partial y} = \frac{2x^5 - 2x^3y^2 - 2x^4z}{x^2 + y^2} = \frac{4x^5}{x^2 + y^2} - \frac{2x^3(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} - \frac{2x^4z}{x^2 + y^2} = 4x^2z - 2x^3 - 2xz^2$$

$$(g) \ yz \frac{\partial \varphi^3}{\partial x} + \left(\frac{3}{2}x^2 - xz\right) \frac{\partial \varphi^3}{\partial y} = \frac{yz(3x^2 - 2xz) + (3/2 x^2 - xz)(-2yz)}{x^2 + y^2} = 0$$

$$(h) \ x \frac{\partial \varphi^3}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi^3}{\partial y} = \frac{3x^3 - 2x^2z}{x^2 + y^2} + \frac{-2y^2z}{x^2 + y^2} = z$$

$$(i) \ xy \frac{\partial \varphi^3}{\partial x} - x^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{3x^3y - 2x^2yz}{x^2 + y^2} + \frac{2x^2yz}{x^2 + y^2} = 3yz$$

ist, folgt mit Hilfe von Bemerkung (4.10), daß die Abbildungen D_1^i für $i=1, \dots, 9$ Differentialoperatoren auf X_1 sind, die in kanonischer Weise auch Differentialoperatoren auf X darstellen.

□

Wir werden im weiteren Verlauf der Betrachtung zeigen, daß „alle“ Differentialoperatoren 1. Grades sich durch $D_0^1 := 1$ und die gerade definierten Differentialoperatoren erzeugen lassen.

Um dies aber zeigen zu können, müssen wir noch einige vorbereitende Aussagen beweisen.

Bemerkung 4.12.: Seien $f, g \in C^N(\mathbb{R}^3, (0,0,0))$ beliebig gewählt.

Dann gilt :

$\exists f_1, f_2, g_1, g_2, g_3 \in C^N(\mathbb{R}^3, (0,0,0))$ und

$f_3, f_4, f_5, f_6, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8 \in C^N(\mathbb{R}, 0)$, so daß

$$(a) \quad f(x, y, z) = x^2 f_1(x, y, z) + y^2 f_2(x, y, z) + xy f_3(z) + x f_4(z) + y f_5(z) + f_6(z)$$

$$(b) \quad g(x, y, z) = x^3 g_1(x, y, z) + y^3 g_2(x, y, z) + xy g_3(x, y, z) + x^2 g_4(z) + y^2 g_5(z) + x g_6(z) + y g_7(z) + g_8(z)$$

ist.

Beweis: Dies ist eine triviale Anwendung des speziellen Divisionstheorems

Satz 4.13.: Sei $f \in C^N(\mathbb{R}^3, (0,0,0))$ mit $f((0,0,0)) = 0$ und $f|_{X_1} = 0$.

$$\sim \frac{\partial^n f}{\partial^n z} (0,0,0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Beweis: Definiert man $\forall a \in \mathbb{R}$ die Funktionen

$$g_a(x) := f(x, ax, (1+a^2)^{-1}x), \text{ so gilt:}$$

Beh. 1.: $\forall a \in \mathbb{R}$ erhält man : $(D^n g_a)(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Beweis: Da für $x \neq 0$ die Beziehung $\frac{x^3}{x^2 + (ax)^2} = \frac{1}{1+a^2} x$ gilt, folgt

$$g_a(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$\sim$ Aus Stetigkeitsgründen gilt dann $g_a = 0$, woraus dann trivialerweise die Behauptung folgt.

Beh. 2.: $\forall a \in \mathbb{R}$ ist

$$\sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^l \sum_{i=0}^k \binom{n}{l} \binom{l}{k} \binom{l}{i} a^{2i+l-k} (D^{k,l-k,n-l} f)(0,0,0) = 0$$

Beweis: Für $a \in \mathbb{R}$ gilt :

$$0 = (D^n g_a)(0) = \sum_{i_1=1}^3 \dots \sum_{i_n=1}^3 \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} (0,0,0) h_{i_1} h_{i_2} h_{i_3},$$

wobei $h_1 := 1$, $h_2 := a$, $h_3 := (1+a^2)^{-1}$ und $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$ ist.

$\sim$ Nach Umordnung ist

$$0 = (D^n g_a)(0) = \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^l \binom{n}{l} \binom{l}{k} a^{1-k} (1+a^2)^{1-n} (D^{k,l-k,n-l} f)(0,0,0).$$

~ Aus Stetigkeitsgründen folgt dann $\forall a \in \mathbb{R}$:

$$0 = \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^l \binom{n}{l} \binom{l}{k} (1+a^2)^l a^{l-k} (D^{k,l-k,n-l} f)(0,0,0)$$

~ Mit $(1+a^2)^l = \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} a^{2i}$ folgt dann die Behauptung !

Betrachtet man den Ausdruck in Behauptung (2) genauer, so sieht man, daß dieser ein Polynom vom Grad $3n$ darstellt. Dies bedeutet:

$\exists P_n(j) \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq j \leq 3n$, so daß

$$\sum_{j=0}^{3n} P_n(j) a^j = \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^l \sum_{i=0}^1 \binom{n}{l} \binom{l}{k} \binom{l}{i} a^{2i+l-k} (D^{k,l-k,n-l} f)(0,0,0)$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

Beh.3.: Mit $s(i,t) := \max\{i, 2t-2i\}$ und $m := \min\{t, n\}$ folgt für $t \leq [\frac{3}{2}n]$:

$$P_n(2t) = \sum_{i=0}^m \sum_{l=s(i,t)}^n \binom{n}{l} \binom{l}{2t-2i} \binom{l}{i} (D^{1-2t+2i, 2t-2i, n-l} f)(0,0,0)$$

Beweis: Nachrechnen !

Um die Aufgabenstellung nicht unnötig zu komplizieren, will ich im folgenden annehmen, daß

$n = 2d$ ist (das entsprechende für ungerade n ergibt sich kanonisch).

Beh.4.: $(D^{0,0,n} f)(0,0,0) = \sum_{t=0}^{3d-2} (-1)^t P_n(2t) = 0$

Beweis: Wir ordnen $\sum (-1)^t P_n(2t)$ nach den Koeffizienten $(D^{k-2p, 2p, n-k} f)(0,0,0)$ für $2p \leq k$.

~ Mit den Bezeichnungen von Behauptung (3) gilt für

(1) $p=0$

~ Der Koeffizient von $(D^{q,0,n-q} f)(0,0,0)$ in der obigen Summe ist

$$\sum_{t=0}^q (-1)^t \binom{n}{q} \binom{q}{t} = \binom{n}{q} \sum_{t=0}^q (-1)^t \binom{q}{t} = 0 \quad \text{für } q = 1, \dots, n$$

Für $q = 0$ ist der Koeffizient gleich 1.

(2) $p>0$

~ Der Koeffizient von $(D^{q-2p, 2p, n-q} f)(0,0,0)$ in der obigen Summe

$$\text{ist } \sum_{t=p}^{q+2p} \binom{n}{k} \binom{q}{2p} \binom{q}{t-p} (-1)^t = 0 \quad \text{für } 2p \leq q \leq n$$

~ Da aufgrund von Beh.(2),(3) $P_n(j) = 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq j \leq 3n$, gilt:

$$0 = \sum_{t=0}^{3d-2} (-1)^t P_n(2t) = (D^{0,0,n_f})(0,0,0)$$

Damit ist Satz (4.13) vollständig bewiesen.

Mit Hilfe dieser Aussagen zeigen wir nun :

Hauptsatz 4.14.: Sei X wie oben definiert und mit der reduzierten N -differenzierbaren Raumstruktur versehen.

Dann gilt:

Die Differentialoperatoren $D_0^1, D_1^1, \dots, D_1^9$ bilden (allerdings kein minimales) Erzeugendensystem des Moduls $\text{DIFF}_{(0,0,0)}^1(X, N)$!

Beweis: Sei $D := f(x,y,z) D^{1,0,0} + g(x,y,z) D^{0,1,0} + h(x,y,z) D^{0,0,1} + k(x,y,z)$

Liftung eines beliebigen N -DO über X in $(0,0,0) \in X$.

~ O.E. sei $k \equiv 0$ (da D_0^1 zum Erzeugendensystem gehört)

Aufgrund von Bemerkung (4.12) gilt:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2 f_1(x,y,z) + y^2 f_2(x,y,z) + x y f_3(z) + x f_4(z) + y f_5(z) + f_6(z) \\ g(x,y,z) &= x^3 g_1(x,y,z) + y^3 g_2(x,y,z) + x y g_3(x,y,z) + x^2 g_4(z) + y^2 g_5(z) \\ &\quad + x g_6(z) + y g_7(z) + g_8(z) \end{aligned}$$

~ Da

- (1) $D_1^1, D_1^2, D_1^3, D_1^4, D_1^6$
- (2) D_1^9
- (3) D_1^5

zum Erzeugendensystem gehören, gilt:

O.E. sei $f_1 = f_2 = g_1 = g_2 = g_3 \equiv 0$, $f_3 \equiv 0$ und $g_5 \equiv 0$

~ $f(x,y,z) = x f_4(z) + c y + y z \tilde{f}_5(z) + f_6(z)$ und

$$g(x,y,z) = x^2 g_4(z) + x g_6(z) + y g_7(z) + g_8(z),$$

wobei $c := f_5(0,0,0)$ und $\tilde{f}_5(z) := (f_5(z) - c) z^{-1}$ ist.

~ Da D_1^7 und D_1^8 zum Erzeugendensystem gehören, gilt O.E.: $\tilde{f}_5 = g_7 = 0$

~ $f(x,y,z) = xf_4(z) + cy + f_6(z)$ und

$$g(x,y,z) = x^2g_4(z) + xg_6(z) + g_8(z)$$

~ Da ferner

$$f(0,0,z) D^{1,0,0} + g(0,0,z) D^{0,1,0} + h(0,0,z) D^{0,0,1}$$

einen N-DO auf der z-Achse darstellen muß, folgt:

$$g_8(z) = g(0,0,z) = f_6(z) = f(0,0,z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

~ $f(x,y,z) = xf_4(z) + cy$ und

$$g(x,y,z) = x^2g_4(z) + xg_6(z)$$

~ Da aber

$$f \frac{\partial \varphi^3}{\partial x} + g \frac{\partial \varphi^3}{\partial y} = 3f_4z - \frac{2x^2zf_4}{x^2+y^2} + \frac{x^2y}{x^2+y^2}(3c-2zg_4) - \frac{2xyz}{x^2+y^2}(c+g_6)$$

eine C^N -Funktion auf X um Null darstellen muß, folgt:

Beh.1.: (a) $c = 0$

(b) f_4, g_4 und g_6 müssen in $0 \in \mathbb{R}$ flache Funktionen sein !

Beweis: Sei $F := f \frac{\partial \varphi^3}{\partial x} + g \frac{\partial \varphi^3}{\partial y} - 3zf_4 \in C^N(X, (0,0,0))$

~ Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} F(x, ax, \frac{x}{1+a^2}) &= -\frac{2x}{(1+a^2)^2} f_4(\frac{x}{1+a^2}) + \frac{ax}{1+a^2} (3c - \frac{2x}{1+a^2} g_4(\frac{x}{1+a^2})) \\ &\quad - \frac{2ax}{(1+a^2)^2} (c + g_6(\frac{x}{1+a^2})) \end{aligned}$$

~ Da F eine C^N -Funktion in einer Umgebung der Null ist, folgt durch kombinatorisches Vergleichen der Potenzen von a die Behauptung. ■

Unterscheidet man im folgenden die Fälle $N = \omega$ und $N = \infty$, so ergibt sich:

1.Fall: $N = \omega$

$$\sim f_4 = g_4 = g_6 = 0$$

~ Es genügt im folgenden, Differentialoperatoren der Form $h(x,y,z) D^{0,0,1}$ zu untersuchen, wobei $h(0,0,0) = 0$ und $h|_{X_1} = 0$ ist.

Definiert man $\tilde{h}(z) := h(0,0,z) \in C^\omega(\mathbb{R}, 0)$, so gilt nach Satz (4.13):

$$(D^n \tilde{h})(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\sim \tilde{h} = 0$$

~ $h|_X = 0$, womit in diesem Fall der Hauptsatz (4.14) bewiesen ist!

2. Fall: $N = \infty$

Beh.2.: Sei $P \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ein Polynom und $K \in C^\infty(\mathbb{R})$ eine in $0 \in \mathbb{R}$ flache Funktion

$\sim \exists Q \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, so daß gilt:

$$(1) Q(0,0,z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

$$(2) Q(x,y,z) = \frac{P(x,y) \cdot K(z)}{x^2 + y^2} \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{Y \cup (0,0,0)\}$$

Beweis: Sei $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\eta(x) := 1 \quad \forall x \in (-\infty, 1)$ und $\eta(x) := 0 \quad x \geq 2$.

Definiert man die Funktion

$$Q(x,y,z) := \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{auf der z-Achse} \\ \eta\left(\frac{z^2}{x^2+y^2}\right) \frac{P(x,y) \cdot K(z)}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{array} \right\}, \text{ so gilt:}$$

$$(1) Q(x,y,z) = 0 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } \frac{z^2}{x^2+y^2} \geq 2$$

(2) $Q \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit den in Beh.(2) geforderten Eigenschaften dar, da Q eine im Nullpunkt platte Funktion ist (Für Betrachtungen von Q ist nach (1) nur der Bereich $\frac{z^2}{x^2+y^2} < 2$ interessant; dort geht aber jede beliebige Ableitung von Q aufgrund der Flachheit der Funktion K mit $(x,y,z) \rightarrow 0$ gegen Null)

Kommen wir nach diesen Vorbereitungen wieder zur Betrachtung unseres Differentialoperators

$$D = x f_4(z) D^{1,0,0} + (x^2 g_4(z) + x g_6(z)) D^{0,1,0} + h(x,y,z) D^{0,0,1}$$

zurück, wobei nach Beh (1) f_4, g_4 und g_6 in $0 \in \mathbb{R}$ flache Funktionen sind.

Nach Beh.(2) gilt:

$\exists$ Funktionen $F_4, G_{4,6} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit

$$(1) x f_4(z) = (x^2 + y^2) F_4(x,y,z) \quad \forall (x,y,z) \in X$$

$$(2) x^2 g_4(z) + x g_6(z) = (x^2 + y^2) G_{4,6}(x,y,z) \quad \forall (x,y,z) \in X$$

$\sim D - F_4 (D_1^1 + D_1^2) - G_{4,6} D_1^5$ ist ein D_0 auf X der Form $k(x,y,z) D^{0,0,1}$, wobei $k(0,0,0) = 0$ und $k|_{X_1} = 0$ ist.

Definiert man $\tilde{k}(z) := k(0,0,z)$, so ist $\tilde{k} \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$ mit $(D^n \tilde{k})(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Beh.3.: $\exists$ Funktion $H \in C^\infty(\mathbb{R}^3, (0,0,0))$ mit

$$(1) H(0,0,z) = \tilde{k}(z)$$

$$(2) H|_{\mathbb{R}^3 - Y} = 0$$

Beweis: O.E. sei $\tilde{k} \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $\tilde{H} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $\tilde{H}(x,y,z) := \tilde{k}(z)$ gewählt.

Ferner sei $\tilde{H} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ die globale Nullfunktion

~ Da (1) $(T_0 \tilde{H})(0,0,0) = (T_0 \tilde{H})(0,0,0) = 0$ (T_0 Taylorreihe um den Nullpunkt)

(2) $\mathbb{R}^3 - Y$ und die z -Achse sich im Nullpunkt regulär schneiden (im Sinne von Definition (5.4)/Theorem (5.5) in [9]),

folgt sofort die Behauptung. ■

Mit $\hat{H}(x,y,z) := \frac{H(x,y,z)}{z} \in C^\infty(\mathbb{R}^3, (0,0,0))$ gilt dann :

(1) $\hat{H} D_1^8 \in \text{DIFF}_{(0,0,0)}^1(X, \infty)$

(2) $(x \hat{H})|_X = 0$; $(y \hat{H})|_X = 0$ und $(z \hat{H})|_X = H|_X = k$

~ $k D^{0,0,1}$ wird auch von den oben aufgeführten 10 Differentialoperatoren erzeugt, womit dann der Hauptsatz (4.14) vollständig bewiesen ist. □

Korollar 4.15.: Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen der Hauptsätze (4.14) und (4.6) gilt:

$$d^1 = 6 > 4 = \dim T_{(0,0,0)}^1 X + 1$$

Beweis: Wie im Hauptsatz (4.14) bewiesen wurde, bilden die Differentialoperatoren $D_0^1, D_1^1, \dots, D_1^9$ ein Erzeugendensystem von $\text{DIFF}_{(0,0,0)}^1(X, N)$. Es gilt:

$$D_1^3 = x D_1^8 - D_1^1 ; D_1^6 = y D_1^5 - x D_1^3 ; D_1^4 = x D_1^5 - y D_1^3 ; D_1^9 = y D_1^8 - D_1^5$$

~ $D_0^1, D_1^1, D_1^2, D_1^5, D_1^7, D_1^8$ erzeugen schon den Modul $\text{DIFF}_{(0,0,0)}^1(X, N)$

~ Mit einer länglichen Rechnung kann man nachweisen, daß dieses System von Erzeugenden minimal ist, woraus dann sofort die Behauptung folgt. □

Damit sind die vorn angekündigten Behauptungen vollständig bewiesen.

Ferner sei an dieser Stelle bemerkt, daß die schon im dritten Paragraphen angekündigte Behauptung, daß es durchaus reellanalytische Mengen geben kann, die nicht kohärent sind, und deren Differentialoperatoren erster Ordnung dennoch von endlich vielen Differentialoperatoren mit reellanalytischen Koeffizienten erzeugt werden, durch Hauptsatz (4.14) insbesondere bewiesen wurde.

§ 5 Untersuchung von $\text{DIFF}_X(X, N)$ auf der Vereinigung zweier eindimensionalen N -differenzierbarer Mannigfaltigkeiten

In [8] stellt Malgrange die für die Theorie der Differentialoperatoren auf Singularitätsmengen schon „klassische“ Frage, wann $\text{DIFF}_X(X, N)$ „endlich erzeugt“ ist.

Dabei wollen wir hier für N -differenzierbare Räume X unter „endlicher Erzeugtheit“ im Sinne von Malgrange das folgende verstehen:

$\exists D_1, \dots, D_k \in \text{DIFF}_X(X, N)$, so daß für alle $D \in \text{DIFF}_X(X, N)$ eine Darstellung

$$D = \sum f_{i_1, \dots, i_p} D_{i_1} \circ \dots \circ D_{i_p}$$

existiert, wobei $f_{i_1, i_2, \dots, i_p} \in C^N(X, \mathbb{C})$ und $i_j \in \{1, \dots, k\}$ für $j = 1, \dots, p$ ist.

Daß diese Frage nicht trivial zu beantworten ist, zeigt die Tatsache, daß, obwohl sich sehr viele Mathematiker mit ihr beschäftigt haben, bis heute keine befriedigende Antwort gefunden werden konnte. Die bisher bekannten Ergebnisse behandeln jeweils nur Spezialfälle für $N = \omega^*$. So konnte Kantor in [7] für normale complexanalytische Räume, die Quotient des $\mathbb{C}^n$ unter einer endlichen Gruppe von Automorphismen sind, und Bloom und Vigüé unabhängig voneinander in [2] bzw. in [19] für eindimensionale irreduzible complexanalytische Räume die „Malgrangsche Frage“ positiv beantworten.

Allerdings weiß man auch schon, daß bei relativ einfachen, und gut zu handhabenden algebraischen Mengen, die Eigenschaft der „endlichen Erzeugtheit“ der Differentialoperatoren verlorengehen kann, wie die Untersuchungen von Bernstein/Gelfand/Gelfand in [1] auf dem komplexen kubischen Kegel zeigen.

Um Vorstellungen über das Verhalten von $\text{DIFF}_X(X, N)$ auch in den Fällen $N = \infty, \omega$ zu bekommen, werde ich in diesem Paragraphen die Malgrangsche Frage für Mengen beantworten, die Vereinigung zweier eindimensionaler N -differenzierbarer Mannigfaltigkeiten, die den Punkt x gemeinsam haben, sind (versehen mit der reduzierten N -differenzierbaren Struktur).

Dabei ergibt sich im Falle $N = \omega, \omega^*$ immer, und im Falle $N = \infty$ bei nicht zu stark „entarteten“ Mannigfaltigkeiten die endliche Erzeugtheit.

Da Vigu   in [19] die endliche Erzeugtheit der Differentialoperatoren auf den von ihm untersuchten Räumen nachwies, indem er für die Graduierung

$$\text{Gr}(\text{DIFF}_X(X, N) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \text{DIFF}_X^k(X, N) / \text{DIFF}_X^{k-1}(X, N)$$

mit $\text{DIFF}_X^{-1}(X, N) := \{0\}$ zeigte, daß diese endlich erzeugt ist, und uns aufgrund der Untersuchungen im dritten Paragraphen auch die endliche Erzeugtheit der $C^\infty(X, x)$ -Moduln $\text{DIFF}_X^k(X, \infty)$ interessieren, werden diese Fragen für den hier behandelten Fall gleich mituntersucht.

Dabei ist es erstaunlich, daß es durchaus Räume geben kann, für die die Moduln $\text{DIFF}_X^k(X, \infty) \forall k \in \mathbb{N}$ nicht endlich erzeugt sind, dagegen aber $\text{DIFF}_X(X, \infty)$ im Malgrangschen Sinne diese Eigenschaft hat.

Bevor wir jedoch diese Ergebnisse herleiten, wollen wir zunächst einige Vorbemerkungen formulieren.

Bemerkung 5.1.: Seien $X \subset \mathbb{K}^n$ und $Y \subset \mathbb{K}^m$ beliebige mit der reduzierten N -differenzierbaren Raumstruktur versehene Mengen.

Ferner sei $\tilde{D} : C^N(X) \rightarrow C^N(X)$ ein N -Differentialoperator vom Grad k über X und $f : X \rightarrow Y$ ein N -Diffeomorphismus.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} D : C^N(Y) &\rightarrow C^N(Y) \\ g &\rightarrow \tilde{D}(g \circ f^{-1}) \cdot f^{-1} \end{aligned} \quad \text{ist ein } N\text{-Differentialoperator vom Grad } k \text{ über } Y \subset \mathbb{K}^m.$$

Beweis: man rechnet die DO-Eigenschaften in kanonischer Weise nach ! □

Bemerkung 5.2.: Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von Bemerkung (5.1) gilt:

Die Abbildung $\hat{f} : \text{DIFF}(X, N) \rightarrow \text{DIFF}(Y, N)$ mit $\hat{f}(\tilde{D}) := D$

ist ein Ringisomorphismus mit

$$(1) \hat{f}(h_1 \cdot \tilde{D}) = (h_1 \circ f^{-1}) \cdot \hat{f}(\tilde{D}) \quad \forall h_1 \in C^N(X), \tilde{D} \in \text{DIFF}(X, N)$$

$$(2) (\hat{f}^{-1})(h_2 D) = (h_2 \circ f) \cdot (\hat{f}^{-1})(D) \quad \forall h_2 \in C^N(Y), D \in \text{DIFF}(Y, N)$$

Beweis: Definiert man $(\hat{f}^{-1}) : \text{DIFF}(\mathbb{Y}, N) \rightarrow \text{DIFF}(\mathbb{X}, N)$ durch $(\hat{f}^{-1})(D)(h) := D(h f^{-1}) f$ für $h \in C^N(X, N)$, so ergibt sich die Behauptung durch triviales Nachrechnen. □

Bemerkung 5.3.: Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen der Bemerkung (5.1) gilt:

- (a) Ist $\text{DIFF}^k(\mathbb{X}, N)$ als Modul endlich erzeugt, so ist auch $\text{DIFF}^k(\mathbb{Y}, N)$ endlich erzeugt.
- (b) Ist $\text{DIFF}(\mathbb{X}, N)$ endlich erzeugt, so auch $\text{DIFF}(\mathbb{Y}, N)$.

Beweis: klar ! □

Für die folgenden Betrachtungen sei folgendes vereinbart :

- (1) M_1, M_2 zwei eindimensionale N -differenzierbare Mannigfaltigkeiten
- (2) $X := M_1 \cup M_2$
- (3) $0 \in M_1 \cap M_2$

Da wir nur Keime von Differentialoperatoren über $\mathbb{X}$ in $0 \in X$ betrachten wollen, können wir nach eventueller Koordinatenänderung und optimaler Einbettung ohne Einschränkung annehmen, daß

- (1) $X \subset \mathbb{K}^2 := \{(x, y) | x \in \mathbb{K}, y \in \mathbb{K}\}$
- (2) $M_1 = \mathbb{K} \times \{0\}$ ist.

Nun müssen wir die verschiedenen, eventuell auftretenden Fälle durchspielen.

1. Fall: Lokal um Null ist $M_1 = M_2$

~ Lokal um Null ist X dann eine eindimensionale N -differenzierbare Mannigfaltigkeit

Dann gilt:

Satz 5.4.: (a) $\text{DIFF}_{(0,0)}^k(\mathbb{X}, N)$ ist $\forall k \in \mathbb{N}$ ein endlich erzeugter $C^N(X, (0,0))$ -Modul !

(b) $\text{Gr}(\text{DIFF}_{(0,0)}(\mathbb{X}, N))$ ist eine endlich erzeugte Algebra !

(c) $\text{DIFF}_{(0,0)}(\mathbb{X}, N)$ ist endlich erzeugt !

Beweis: Da die N -Differentialoperatoren auf der x -Achse die geforderten Eigenschaften besitzen, folgt sofort die Behauptung. $\square$

2. Fall: M_1 und M_2 schneiden sich in $(0,0)$ transversal !

$\sim$ O.E. sei $M_2 = \{0\} \times \mathbb{K}$

Dann gilt:

Satz 5.5.: (a) $N(X)_{(0,0)} = \langle xy \rangle_{C^N(\mathbb{K}^2, (0,0))}$

(b) $\text{DIFF}_{(0,0)}^k(X, N) = \langle 1; x D^{n,0}; y D^{0,n} \mid \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \leq k \rangle_{C^N(X, (0,0))}$
und damit ein endlich erzeugter $C^N(X, (0,0))$ -Modul für alle $k \in \mathbb{N}$!

(c) $\text{Gr}(\text{DIFF}_{(0,0)}(X, N))$ ist eine nicht endlich erzeugte Algebra !

(d) $\text{DIFF}_{(0,0)}(X, N)$ wird von $\text{DIFF}_{(0,0)}^3(X, N)$ erzeugt und ist damit natürlich endlich erzeugt !

Beweis: (a) Sei $f \in N(X)_{(0,0)}$ beliebig gewählt .

$\sim$ Da $f|_{\mathbb{K} \times \{0\}} = 0$ ist, gilt: $\exists f_1 \in C^N(X, (0,0))$ mit $f(x,y) = y f_1(x,y)$

$\sim$ Da $f|_{\{0\} \times \mathbb{K}} = 0$ ist, gilt: $f_1|_{\{0\} \times \mathbb{K}} = 0$

$\sim \exists f_2 \in C^N(X, (0,0))$, so daß $f(x,y) = y f_1(x,y) = x y f_2(x,y)$ ist.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt.

Ferner sei $D := \sum_{i+j \leq k} a_{i,j} D^{i,j} : C^N(X, (0,0)) \rightarrow C^N(X, (0,0))$

ein beliebiger N -Differentialoperator vom Grad k über X in $(0,0) \in X$.

$\sim$ Mit einer kurzen Zwischenüberlegung erkennt man :

$$(1) a_{i,j}|_X = 0 \text{ für } i \geq 1, j \geq 1$$

$$(2) a_{i,0}|_{\{0\} \times \mathbb{K}} = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq k$$

$$(3) a_{0,i}|_{\mathbb{K} \times \{0\}} = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq k$$

$\sim$ Mit einer ähnlichen Schlußweise wie unter (a) folgt dann die Teilbehauptung (b) .

(c) $\text{Gr}(\text{DIFF}_{(0,0)}(\mathbf{X}, \mathbf{N}))$ ist eine kommutative Algebra .

~ Für $D_1, D_2 \in \text{Gr}(\text{DIFF}_{(0,0)}(\mathbf{X}, \mathbf{N}))$ gilt :

$$(1) D_1 \circ D_2 = D_2 \circ D_1$$

(2) Sind die N -DO D_1, D_2 beide von der Ordnung ≥ 1 , so gilt für die Koeffizienten $a_{i,j}$ der höchsten Ableitungen von $D_1 \circ D_2$:

$$a_{i,j} \in \tilde{m}^2(0,0)$$

Angenommen: $\text{Gr}(\text{DIFF}_{(0,0)}(\mathbf{X}, \mathbf{N}))$ wäre endlich erzeugt

~ $\exists k \in \mathbb{N}$, so daß $\text{Gr}^k(\text{DIFF}_{(0,0)}(\mathbf{X}, \mathbf{N}))$ ein Erzeugendensystem darstellt

~ Da $y \notin \tilde{m}^2(0,0)$ ist, gilt:

$y D^{0,k+1}$ wird nicht von $\text{Gr}^k(\text{DIFF}_{(0,0)}(\mathbf{X}, \mathbf{N}))$ erzeugt, woraus dann die Teilbehauptung (c) folgt

(d) Es sei $D_i^1 := x D^{i,0}$ und $D_i^2 := y D^{0,i}$ für $i \in \mathbb{N}$

Dann gilt:

Beh.1.: Definiert man sukzessive für $j = 1, 2$

$$\tilde{D}_k^j := \begin{cases} D_3^j \circ D_2^j - D_2^j \circ D_3^j & \text{für } k = 4 \\ \tilde{D}_{k-1}^1 \circ D_2^j - D_2^j \circ \tilde{D}_{k-1}^j & \text{für } k > 4 \end{cases}$$

so gilt für $k > 3$: $D_k^j = ((k-3)!)^{-1} \tilde{D}_k^j$

Beweis: durch Induktion über $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 4$!

O.E. sei $j = 1$ (für $j = 2$ ergibt sich das Ergebnis analog)

(I.A.): $k = 4$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_4^1 &= D_3^1 D_2^1 - D_2^1 D_3^1 = 3x D^{4,0} + x^2 D^{5,0} - 2x D^{4,0} - x^2 D^{5,0} \\ &= x D^{4,0} = D_4^1 \end{aligned}$$

(I.S.) $(k-1) \rightarrow k$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_k^1 &= \tilde{D}_{k-1}^1 D_2^1 - D_2^1 \tilde{D}_{k-1}^1 = (k-4)! (D_{k-1}^1 D_2^1 - D_2^1 D_{k-1}^1) \\ &= (k-4)! (x^2 D^{k+1,0} + (k-1)x D^{k,0} - x^2 D^{k+1,0} - 2x D^{k,0}) \\ &= (k-3)! x D^{k+1,0} = (k-3)! D_k^1 \end{aligned}$$

Damit ist Behauptung (1) vollständig bewiesen. ■

$\sim \text{DIFF}_{(0,0)}(\mathbb{X}, \mathbb{N})$ wird durch $\text{DIFF}_{(0,0)}^3(\mathbb{X}, \mathbb{N})$, also durch die Differentialoperatoren $D_0^1 := 1 ; D_1^1 ; D_1^2 ; D_2^2 ; D_2^1 ; D_3^1 ; D_3^2$ im Malgrangschen Sinne endlich erzeugt !

□

Für die nun folgenden Fälle können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $M_2 = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{K}\}$ ist, wobei $f \in C^N(\mathbb{K})$ gewählt ist.

Um also Differentialoperatoren auf X berechnen zu können, werden wir im folgenden unter den Differentialoperatoren auf M_2 diejenigen heraussuchen, die sich in kanonischer Weise auf X fortsetzen lassen.

Dazu ist es natürlich zuerst notwendig, die N -Differentialoperatoren auf M_2 beziehungsweise deren charakteristische Gestalt näher kennenzulernen.

Bemerkung 5.6.: Seien $\tilde{D}_0 := 1 ; \tilde{D}_1 := D^{1,0} + f'(x) D^{0,1}$ und $\tilde{D}_i := \tilde{D}_1 \circ \dots \circ \tilde{D}_1$ (i -mal) Differentialoperatoren auf M_2 .

Dann gilt :

$\text{DIFF}_{(0,0)}^k(M_2, \mathbb{N})$ wird von den N -Differentialoperatoren $\tilde{D}_0, \tilde{D}_i$ für $i \leq k$ als Modul über $C^N(M_2, (0,0))$ erzeugt !

Beweis: klar !

□

Beispiel 5.7.: Mit den Bezeichnungen von Bemerkung (5.6) gilt:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \tilde{D}_2 &= D^{2,0} + 2f'(x) D^{1,1} + (f'(x))^2 D^{0,2} + f''(x) D^{0,1} \\
 \text{(b)} \quad \tilde{D}_3 &= D^{3,0} + 3f'(x) D^{2,1} + 3(f'(x))^2 D^{1,2} + (f'(x))^3 D^{0,3} \\
 &\quad + 3f''(x) D^{1,1} + 3f'(x) f''(x) D^{0,2} + f'''(x) D^{0,1} \\
 \text{(c)} \quad \tilde{D}_4 &= D^{4,0} + 4f'(x) D^{3,1} + 6(f'(x))^2 D^{2,2} + 4(f'(x))^3 D^{1,3} \\
 &\quad + (f'(x))^4 D^{0,4} + 6f''(x) D^{2,1} \\
 &\quad + (3(f'(x))^2 + 6f'(x) f''(x)) D^{1,2} + 6(f'(x))^2 f''(x) D^{0,3} \\
 &\quad + 4f'''(x) D^{1,1} + (3(f''(x))^2 + 4f'(x) f'''(x)) D^{0,2} \\
 &\quad + f''''(x) D^{0,1}
 \end{aligned}$$

Satz 5.8.: Mit den Bezeichnungen von Bemerkung (5.6) ist

$$\tilde{D}_k = D^{k,0} + \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{t=1}^{k-1} p_{k-l-t,t}^k(f^{(1)}, \dots, f^{(l+1)}) D^{k-l-t,t},$$

wobei folgendes gilt:

- (a) $p_{k-l-t,t}^k$ sind homogene Polynome vom Grad t in $(l+1)$ -Variablen
- (b) $p_{k-t,t}^k(f^{(1)}) = \binom{k}{t} (f^{(1)})^t$ für alle $t = 1, \dots, k$
- (c) $p_{k-l-1,1}^k(f^{(1)}, \dots, f^{(l+1)}) = \binom{k}{l+1} f^{(l+1)}$ für alle $l = 1, \dots, (k-1)$
- (d) $p_{k-l-t,t}^k(0, \dots, 0, f^{(s+1)}, \dots, f^{(l+1)}) = 0$ für $s := \lfloor \frac{l}{2} \rfloor + 1$ und $t \geq 2$.

Beweis: durch Induktion über $k \in \mathbb{N}$

(I.A) $k = 1$

Mit $\tilde{D}_1 = D^{1,0} + f^{(1)} D^{0,1}$ folgt trivialerweise die Behauptung !

(I.S) $k \rightarrow (k+1)$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{k+1} &= (D^{1,0} + f^{(1)} D^{0,1}) \circ \tilde{D}_k = D^{k+1,0} + f^{(1)} D^{k,1} \\ &+ \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{t=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{l+1} \frac{\partial p_{k-l-t,t}^k(f^{(1)}, \dots, f^{(l+1)})}{\partial x_i} f^{(i+1)} D^{k-l-t,t} \\ &+ \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{t=1}^{k-1} p_{k-l-t,t}^k(f^{(1)}, \dots, f^{(l+1)}) D^{k+1-l-t,t} \\ &+ \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{t=1}^{k-1} p_{k-l-t,t}^k(f^{(1)}, \dots, f^{(l+1)}) f^{(1)} D^{k-l-t,t+1} \\ &= D^{k+1,0} + f^{(1)} D^{k,1} \\ &+ \sum_{l=1}^k \sum_{t=1}^{k+1-l} \sum_{i=1}^l \frac{\partial p_{k+1-l-t,t}^k(f^{(1)}, \dots, f^{(l)})}{\partial x_i} f^{(i+1)} D^{k+1-l-t,t} \\ &+ \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{t=1}^{k-1} p_{k-l-t,t}^k(f^{(1)}, \dots, f^{(l+1)}) D^{k+1-l-t,t} \\ &+ \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{t=2}^{k+1-l} f^{(1)} p_{k+1-l-t,t-1}^k(f^{(1)}, \dots, f^{(l+1)}) D^{k+1-l-t,t} \end{aligned}$$

Definiert man die Koeffizienten $p_{k+1-l-t,t}^{k+1}$ in der folgenden Weise, so gilt:

1. Fall : Für $l = 0$ ergibt sich :

$$(a) \quad t = 1 \sim p_{k,1}^{k+1}(f') := f' + p_{k-1,1}^k(f') = (1 + \binom{k}{1}) f' = \binom{k+1}{1} f'$$

$$(b) \quad t = 2, \dots, k$$

$$\begin{aligned} \sim p_{k+1-t,t}^{k+1}(f') &:= p_{k-t,t}^k(f') + f' p_{k+1-t,t-1}^k(f') \\ &= \binom{k}{t} (f')^t + \binom{k}{t-1} (f')^{t-1} = \binom{k+1}{t} (f')^t \end{aligned}$$

$$(c) \quad t = k+1 \sim p_{0,k+1}^{k+1}(f') := f' p_{0,k}^k(f') = \binom{k}{k} (f')^{k+1} = \binom{k+1}{k+1} (f')^{k+1}$$

2. Fall : Für $l = 1, \dots, k-1$ ergibt sich :

$$\begin{aligned} (a) \quad t = 1 \sim p_{k+1-l-1,1}^{k+1}(f^{(1)}, \dots, f^{(l+1)}) &:= p_{k-l-1,1}^k(f^{(1)}, \dots, f^{(l+1)}) \\ &+ \sum_{i=1}^l f^{(1+i)} \frac{\partial p_{k-l,1}^k}{\partial x_i}(f^{(1)}, \dots, f^{(l)}) \\ &= \binom{k}{l+1} f^{(1+1)} + \binom{k}{l} f^{(1+1)} = \binom{k+1}{l+1} f^{(1+1)} \end{aligned}$$

$$(b) \quad t = 2, \dots, (k-1)$$

$$\begin{aligned} \sim p_{k+1-l-t,t}^{k+1}(f^{(1)}, \dots, f^{(l+1)}) &:= f' p_{k-l-(t-1),(t-1)}^k(f^{(1)}, \dots, f^{(l+1)}) \\ &+ \sum_{i=1}^l f^{(i+1)} \frac{\partial p_{k-l-(t-1)-t,t}^k}{\partial x_i}(f^{(1)}, \dots, f^{(l)}) \\ &+ p_{k-l-t,t}^k(f^{(1)}, \dots, f^{(l+1)}) \end{aligned}$$

$$(c) \quad t = k+1-l$$

$$\begin{aligned} \sim p_{0,k+1-l}^{k+1}(f^{(1)}, \dots, f^{(l+1)}) &:= \sum_{i=1}^l f^{(i+1)} \frac{\partial p_{0,k+1-l}^k}{\partial x_i}(f^{(1)}, \dots, f^{(l)}) \\ &+ f' p_{0,k-l}^k(f^{(1)}, \dots, f^{(l+1)}) \end{aligned}$$

3. Fall : Für $l = k$ ergibt sich :

$$\begin{aligned} p_{0,1}^{k+1}(f^{(1)}, \dots, f^{(l+1)}) &:= \sum_{t=1}^l \sum_{i=1}^k f^{(i+1)} \frac{\partial p_{1-t,t}^k}{\partial x_i}(f^{(1)}, \dots, f^{(l+1)}) \\ &= f^{(k+1)} \end{aligned}$$

$\sim$ Mit diesen so definierten $p_{k+1-l-t,t}^{k+1}$ folgt jetzt sofort :

$$(1) \quad \tilde{D}_{k+1} = D^{k+1} + \sum_{l=0}^k \sum_{t=1}^{k+1-l} p_{k+1-l-t,t}^{k+1}(f^{(1)}, \dots, f^{(l+1)}) D^{k+1-l-t,t}$$

(2) Für diese Polynome gelten in kanonischer Weise die unter (1)-(4) geforderten Bedingungen.

Damit wissen wir, welche Form allgemein ein N-Differentialoperator auf M_2 hat.

Um diese allerdings in trivialer Weise als N-Differentialoperatoren auf X betrachten zu können, müssen wir zusätzlich fordern, daß für die Koeffizienten $a_{i,j}$ des N-DO D gilt:

$$a_{i,j}|_{K \times \{0\}} = 0 \text{ für } j > 0$$

Da man sofort sieht, daß die in Satz (5.8) hergeleiteten Erzeugenden der N-DO auf M_2 diese Eigenschaft nicht haben, werden wir im folgenden versuchen, durch Multiplikation mit geeigneten C^N -Funktionen über X unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $y = f(x)$ auf M_2 ist, diese Eigenschaft zu konstruieren.

Dabei wird für die Einzeluntersuchungen die folgende Menge

$$Z := \{(P_1, P_2) \in C^N(K, 0) \times C^N(K, 0) \mid P_1(x) \cdot f'(x) = P_2(x) \cdot f(x)\}$$

eine besondere Rolle spielen.

Bemerkung 5.9.: Mit den in diesem Paragraphen üblichen Bezeichnungen gilt :

(a) $\tilde{D}_k := y \tilde{D}_k$ ist $\forall k \in \mathbb{N}$ ein N-DO auf X !

(b) $\hat{D}_k := f(x) D_k^{k,0} + y (\tilde{D}_k - D_k^{k,0})$ ist $\forall k \in \mathbb{N}$ ein N-DO auf X !

(c) Für $(P_1, P_2) \in Z$ gilt:

$$D_1(P_1, P_2) := P_1 D^{1,0} + P_2 y D^{0,1}$$

$$D_2(P_1, P_2) := P_1 D^{2,0} + 2P_2 y D^{1,1} + f' P_2 y D^{0,2} + P_2' y D^{0,1} - (P_2 - P_1') D^{1,0}$$

sind N-DO erster bzw. zweiter Ordnung auf X !

(d) Definiert man $W^i := \{ D_i(P_1, P_2) \mid (P_1, P_2) \in Z \}$ für $i = 1, 2$, so sind die Abbildungen

$$D_{2l+1} := D_{i_0} \circ D_{i_1} \circ \dots \circ D_{i_l} \text{ und } D_{2l} := D_{i_1} \circ \dots \circ D_{i_l} \text{ für } l \in \mathbb{N}$$

$$\text{und } D_{i_0} \in W^1 \text{ bzw. } D_{i_j} \in W^2 \text{ für } j = 1, \dots, l$$

jeweils N-DO $(2l+1)$ -ten bzw. $(2l)$ -ten Grades auf X !

Beweis: (a),(b) klar

(c) Für $(P_1, P_2) \in Z$ gilt :

$$(1) P_1 f' = P_2 f$$

$$(2) (P_1 f')' = P_1' f' + P_1 f'' = P_2' f + P_2 f' = (P_2 f)'$$

$$\leadsto P_1 f'' = P_2' f + (P_2 - P_1') f'$$

$\leadsto$ Auf M_2 gilt dann :

$$D_1(P_1, P_2) := P_1 \tilde{D}_1 = P_1 D^{1,0} + P_1 f' D^{0,1} = P_1 D^{1,0} + P_2 y D^{0,1}$$

$$\begin{aligned} D_2(P_1, P_2) &:= P_1 \tilde{D}_2 - (P_2 - P_1') \tilde{D}_1 \\ &= P_1 D^{2,0} + 2P_1 f' D^{1,1} + P_1 (f')^2 D^{0,2} + P_1 f'' D^{0,1} \\ &\quad - (P_2 - P_1') D^{1,0} - (P_2 - P_1') f' D^{0,1} \\ &= P_1 D^{2,0} + 2P_2 y D^{1,1} + P_2 f' y D^{0,2} + P_2 y D^{0,1} \\ &\quad - (P_2 - P_1') D^{1,0} \end{aligned}$$

$\leadsto$ Da diese Abbildungen in natürlicher Weise N-DO auf X darstellen, folgt sofort die Behauptung (c) !

(d) klar □

Wir werden im folgenden sehen, daß diese gerade definierten N-Differentialoperatoren für fast alle hier behandelten Fälle alle auf X existierenden N-Differentialoperatoren erzeugen .

Bemerkung 5.10.: Sei $D = \sum_{i+j \leq k} a_{i,j} D^{i,j}$ ein beliebiger N-DO k -ten Grades auf X mit

$$a_{k,0}(x,y) = \hat{g}_k(x) y, \text{ wobei } \hat{g}_k \in C^N(\mathbb{K}, 0) \text{ ist.}$$

Dann gilt mit den Bezeichnungen von Bemerkung (5.9) :

$$D \circ D_2(P_1, P_2) - D_2(P_1, P_2) \circ D := \sum_{i+j \leq k+1} b_{i,j} D^{i,j} \text{ ist ein N-DO}$$

$(k+1)$ -ten Grades auf X , wobei mit

$$\hat{g}_{k+1}(x) := k \hat{g}_k(x) \cdot P_1'(x) - 2 \cdot P_1(x) \cdot \hat{g}_k'(x) - 2 \cdot P_2(x) \cdot \hat{g}_k(x) \text{ die Beziehung}$$

$$b_{k+1,0}(x,y) = \hat{g}_{k+1}(x) \cdot y \text{ gilt !}$$

Beweis: Es ist klar, daß $D \circ D_2(P_1, P_2) = D_2(P_1, P_2) \circ D$ ein N -DO $(k+1)$ -ten Grades auf X der obigen Form ist.

Dabei gilt dann :

$$\begin{aligned} b_{k+1,0}(x,y) &= [k \cdot P_1'(x) \cdot \bar{g}_k(x) \cdot y - \bar{g}_k(x) \cdot (P_2(x) - P_1'(x)) \cdot y \\ &\quad + P_1(x) \cdot a_{k-1,0}(x,y)] - [2 \cdot P_1(x) \cdot \bar{g}_k'(x) \cdot y + P_1(x) \cdot a_{k-1}(x,y) \\ &\quad + 2 \cdot P_2(x) \cdot \bar{g}_k(x) \cdot y - (P_2(x) - P_1'(x)) \cdot \bar{g}_k(x) \cdot y] \\ &= [k \bar{g}_k'(x) \cdot P_1'(x) - 2 \cdot P_1(x) \cdot \bar{g}_k'(x) - 2 \cdot P_2(x) \cdot \bar{g}_k(x)] \cdot y \end{aligned}$$

Kommen wir nach diesen Vorbetrachtungen zu den noch zu behandelnden Fällen !

3. Fall : M_1 und M_2 berühren sich in $(0,0)$ von endlicher Ordnung und schneiden sich nicht transversal in $(0,0)$!

$\sim$ O.E. sei $M_2 := \{(x, x^n) \in \mathbb{K}^2 \mid x \in \mathbb{K}\}$, wobei $n \geq 2$ ist.

Dann gilt mit den Bezeichnungen der Vorbetrachtungen :

$$(1) D_1^* := D_1(x, n) = x D^{1,0} + n y D^{0,1}$$

$$(2) D_2^* := D_2(x, n) = x D^{2,0} + 2n y D^{1,1} + n^2 x^{n-1} y D^{0,2} - (n-1) D^{1,0}$$

(3) Für $l = 3, \dots, 2n-2$, $n \geq 3$ sei

$$D_l^* := \begin{cases} D_2^* \circ \dots \circ D_2^* \quad (m\text{-mal}) & \text{für } l = 2m \\ D_1^* \circ D_2^* \circ \dots \circ D_2^* \quad ((m-1)\text{-mal}) & \text{für } l = 2m-1 \end{cases}$$

(4) Für $l \geq 2n-1$ sei $D_l^* := \hat{D}_1$

Satz 5.11.: (a) $\pi(X)_{(0,0)} = \langle y(y-x^n) \rangle_{C^N(\mathbb{K}^2, (0,0))}$

(b) $\text{DIFF}_{(0,0)}^k(X, N) = \langle 1; \hat{D}_1; D_1^* \text{ für } l = 1, \dots, k \rangle_{C^N(X, (0,0))}$ und ist damit $\forall k \in \mathbb{N}$ ein endlich erzeugter $C^N(X, (0,0))$ -Modul !

(c) $\text{Gr}(\text{DIFF}_{(0,0)}(X, N))$ ist keine endlich erzeugte Algebra !

(d) $\text{DIFF}_{(0,0)}(X, N)$ wird von $\text{DIFF}_{(0,0)}^{2n+1}(X, N)$ und damit von endlich vielen N -Differentialoperatoren erzeugt !

Beweis: (a) klar !

(b) Es gilt:

Beh.1.: Es sei $\forall m, t \in \mathbb{N}$ mit $m \geq t$ und für $j = 0, \dots, k$

$$A(m, t, j) := \begin{bmatrix} \binom{m}{t} & \dots & \binom{m}{t-j} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \binom{m}{t+j} & \dots & \binom{m}{t} \end{bmatrix}, \text{ wobei } \binom{m}{l} := 0 \text{ für } l > m \text{ ist.}$$

$$\Rightarrow \text{rg}(A(m, t, j)) = j+1$$

Beweis: durch Induktion über j !

(I.A.) $j = 0 \Rightarrow \forall m \geq t$ ist $\text{rg}(A(m, t, 0)) = 1$!

(I.S.) $(j-1) \rightarrow j$

Es gilt :

$$\begin{aligned} A(m, t, j) &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \binom{m}{t} & \binom{m}{t-1} & \dots & \binom{m}{t-j} \\ 0 & \binom{m}{t} - \frac{m-t}{t+1} \binom{m}{t-1} & \dots & \binom{m}{t+1-j} - \frac{m-t}{t+1} \binom{m}{t-j} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \binom{m}{t+j-1} - \frac{m-(t+j-1)}{t+j} \binom{m}{t+j-2} & \dots & \binom{m}{t} - \frac{m-(t+j-1)}{t+j} \binom{m}{t-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \binom{m}{t} & \binom{m}{t-1} & \dots & \binom{m}{t-j} \\ 0 & \frac{1}{t+1} \binom{m+1}{t} & \dots & \frac{j}{t+1} \binom{m+1}{t-(j-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{t+j} \binom{m+1}{t+j-1} & \dots & \frac{j}{t+j} \binom{m+1}{t} \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \binom{m}{t} & \binom{m}{t-1} & \frac{1}{2} \binom{m}{t-2} & \dots & \frac{1}{j} \binom{m}{t-j} \\ 0 & \vdots & A(m+1, t, j-1) & \dots & \vdots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{rg}(A(m, t, j)) = j+1$$

Kommen wir nach dieser Vorbetrachtung zum Beweis der Teilbehauptung (b) !
Sei $D := \sum_{i+j \leq k} a_{i,j} D^{i,j}$ eine beliebiger N-DO k-ter Ordnung auf X.

~ (1) $a_{i,j}|_{M_1} \equiv 0$ für $j > 0$

(2) Modulo $\text{DIFF}_{(0,0)}^{k-1}(X,N)$ ist D dann durch $a_{k,0}$ eindeutig bestimmt.

Da die Differentialoperatoren k-ter Ordnung auf X genau diejenigen Differentialoperatoren auf M_2 sind, die sich in natürlicher Weise zu DO auf X fortsetzen lassen und Differentialoperatoren k-ter Ordnung auf M_2 durch

$$\tilde{D}_k \text{ modulo } \text{DIFF}_{(0,0)}^{k-1}(M_2,N)$$

erzeugt werden, versuchen wir im folgenden, alle C^N -Funktionen $a_{k,0}$ zu bestimmen, für die mindestens ein $\tilde{D} \in \text{DIFF}_{(0,0)}^{k-1}(M_2,N)$ existiert, so daß

$$(\otimes) \quad a_{k,0} \tilde{D}_k + \tilde{D}$$

in natürlicher Weise einen DO auf X darstellt.

Da $D := \tilde{D}_k = y \tilde{D}_k$ ein DO auf X ist, können wir für die folgende Betrachtung ohne Einschränkung annehmen :

$$a_{k,0}(x,y) := a_{k,0}(x)$$

Angenommen : Die $(\otimes)$ -Bedingung werde für $a_{k,0}(x) := x^{j_0}$ erfüllt, wobei

$$j_0 := \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor \text{ ist (für } k \leq 2n-1 \text{) !}$$

(Gäbe es schon eine niedrigere x-Potenz als j_0 , so daß die $(\otimes)$ -Bedingung erfüllt wäre, so müßte dies dann insbesondere auch für j_0 gelten !)

⇒ Für $i = 0, \dots, j_0$ gilt mit den analogen Bezeichnungen von Satz (5.8) für die Koeffizienten $\tilde{p}_{(k-i)-1-1,1}^{k-i}$ von $x^{j_0-i} \tilde{D}_{k-i}$:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{(k-i)-1-1,1}^{k-i}(x) &= \binom{k-i}{1+1} \frac{n!}{(n-(1+1))!} x^{n-(1+1)} x^{j_0-i} \\ &= (k-i)! \binom{n}{1+1} x^{n+j_0-1-(i+1)} \quad \text{für } i = 0, \dots, k-i-1 \end{aligned}$$

⇒ Für die DO $x^{j_0} \tilde{D}_k, x^{j_0-1} \tilde{D}_{k-1}, \dots, \tilde{D}_{k-j_0}$ gilt dann also :

(1) Die entsprechenden Koeffizienten von $D^{t,1}$ haben jeweils die gleiche x-Potenz !

(2) Es tauchen bei diesen DO als x-Potenzen bei den $D^{t,1}$ (mit kleinerer x-Potenz als n) nur $x^{n-1}, x^{n-2}, \dots, x^{n-(k-j_0)}$ auf !

⇒ Da $a_{k,0}(x) = x^{j_0}$ ja die $(\otimes)$ -Eigenschaft erfüllen soll, gilt:

$\exists b := (b_0, \dots, b_{j_0}) \in \mathbb{R}^{j_0+1}$ mit $b_0 \neq 0$, so daß mit

$$B := \begin{bmatrix} k! \binom{n}{j_0+1} & \dots & (k-j_0)! \binom{n}{1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ k! \binom{n}{k} & \dots & (k-j_0)! \binom{n}{k-j_0} \end{bmatrix} \quad \text{die Bedingung}$$

$B \cdot b = 0$ gilt!

1. Fall: k gerade $\Rightarrow j = \frac{k}{2} - 1$

⇒ Damit ergibt sich für B die Matrix

$$\begin{bmatrix} k! \binom{n}{k/2} & \dots & (\frac{k}{2} + 1)! \binom{n}{1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ k! \binom{n}{k} & \dots & (\frac{k}{2} + 1)! \binom{n}{1+k/2} \end{bmatrix}$$

⇒ Läßt man von B die letzte Zeile weg, so ist die dann entstandene $(k/2) \times (k/2)$ -Matrix äquivalent zu $A(n, k/2, k/2 - 1)$, und hat damit natürlich maximalen Rang!

⇒ $b = (b_0, \dots, b_{k/2-1}) = (0, \dots, 0)$

⇒ $\nexists$ (da b_0 ja nach Voraussetzung $\neq 0$ sein mußte)

2. Fall: k ungerade $\Rightarrow j = \frac{k}{2} - \frac{1}{2}$

⇒ Damit ergibt sich für B die Matrix

$$\begin{bmatrix} k! \binom{n}{(k+1)/2} & \dots & (\frac{k+1}{2})! \binom{n}{1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ k! \binom{n}{k} & \dots & (\frac{k+1}{2})! \binom{n}{(k+1)/2} \end{bmatrix}$$

⇒ Da B äquivalent zu $A(n, (k+1)/2, (k-1)/2)$ ist, hat B damit natürlich maximalen Rang!

$$\Rightarrow b = (b_0, \dots, b_{(k/2)-1}) = (0, \dots, 0)$$

$\Rightarrow \#$ (da nach Voraussetzung ja $b_0 \neq 0$ sein muß !)

Dies bedeutet wiederum für unser Problem :

Die niedrigste Potenz von x , für die die $(@)$ -Bedingung erfüllt ist, muß für $k \leq 2n-1$ größer als j_0 sein !

Aus dieser Überlegung ergibt sich dann :

Beh.2.: Mit $l := \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ gilt :

$$a_{k,0} \in \begin{cases} \langle y ; x^l \rangle_{C^N(X, (0,0))} & \text{für } k \leq 2n-1 \\ \langle y ; x^n \rangle_{C^N(X, (0,0))} & \text{für } k > 2n-1 \end{cases}$$

Da aber, wie schon erwähnt, für $\tilde{D}_k$ der Koeffizient $a_{k,0}(x,y) = y$ und für D_k^* der Koeffizient $a_{k,0}(x,y) = x^l$ für $k \leq 2n-1$ bzw. $= x^n$ für $k > 2n-1$ ist, folgt damit die Teilbehauptung (b) !

(c) Ang.: $\text{Gr}(\text{DIFF}_{(0,0)}(X,N))$ wäre endlich erzeugt

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$, so daß $\text{Gr}^k(\text{DIFF}_{(0,0)}(X,N)) \subset \text{Gr}(\text{DIFF}_{(0,0)}(X,N))$ erzeugt

$\Rightarrow$ Mit der gleichen Argumentation wie in Satz (5.5)(c) zeigt man dann, daß $\tilde{D}_{k+1} := y \tilde{D}_{k+1}$ modulo $\text{DIFF}_{(0,0)}^k(X,N)$ nicht von $\text{Gr}^k(\text{DIFF}_{(0,0)}(X,N))$ erzeugt wird, woraus dann der Widerspruch folgt !

(d) Beh.3.: Sei $D := \sum_{i+j \leq k} a_{i,j} D^{i,j}$ ein N -DO k -ten Grades auf X mit

der Eigenschaft, daß $a_{k,0}(x,y) = d_k x^n$, $d_k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ist.

$\Rightarrow D \circ D_2^* - D_2^* \circ D := \sum_{i+j \leq k+1} b_{i,j} D^{i,j}$ ist ein N -DO $(k+1)$ -ten Grades auf X ,

wobei $b_{k+1,0}(x,y) = (k-2n) \cdot d_k x^n$ ist !

Beweis: Es ist klar, daß $D \circ D_2^* - D_2^* \circ D$ ein N -DO auf X vom Grad $(k+1)$ der oben geforderten Form ist, für den

$$b_{k+1,0}(x,y) = \{k d_k x^n - (n-1) d_k x^n + x a_{k-1}(x,y)\} - \{2n d_k x^n - (n-1) d_k x^n + x a_{k-1,0}(x,y)\} = (k-2n) d_k x^n \text{ ist .}$$

Beh.4.: $\text{DIFF}_{(0,0)}^{2n+1}(X,N)$ wird von $\text{DIFF}_{(0,0)}^{2n+1}(X,N)$ erzeugt !

Beweis: Definiert man sukzessive

$$p_k^1 := \begin{cases} D_{2n+1}^* \circ D_2^* - D_2^* \circ D_{2n+1}^* & \text{für } k = 2n+2 \\ p_{k-1}^1 \circ D_2^* - D_2^* \circ p_{k-1}^1 & \text{für } k > 2n+2 \end{cases}$$

und

$$p_k^2 := \begin{cases} \tilde{D}_{2n+1}^* \circ D_2^* - D_2^* \circ \tilde{D}_{2n+1}^* & \text{für } k = 2n+2 \\ p_{k-1}^2 \circ D_2^* - D_2^* \circ p_{k-1}^2 & \text{für } k > 2n+2 \end{cases}$$

so gilt mit den Bezeichnungen von Bemerkung (5.10) :

(1) D_{2n+1}^* , p_k^1 für $k \geq 2n+2$ sind N-Differentialoperatoren der in Behauptung (3) geforderten Form !

~ Mit $d_{2n+1} := 1$ und $d_{k+1} = (k-2n)d_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ für $k > 2n$, folgt dann sofort :

$$\frac{1}{d_k} p_k^1 - D_k^* \in \text{DIFF}_{(0,0)}^{k-1}(X,N) \quad \text{für } k \geq 2n+2$$

(2) $\tilde{D}_{2n+1}^*$, p_k^2 für $k \geq 2n+2$ sind N-Differentialoperatoren der in Bemerkung (5.10) geforderten Form !

~ Mit $\tilde{g}_{2n+1}(x) := 1$ und $\tilde{g}_{k+1}(x) = k\tilde{g}_k(x) - 2x\tilde{g}'_k(x) - 2n\tilde{g}_k(x)$ für $k > 2n$, wobei $\tilde{g}_{k+1}(0) = -2n\tilde{g}_k(0) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist, folgt sofort :

$$\frac{1}{\tilde{g}_k} p_k^2 - \tilde{D}_k^* \in \text{DIFF}_{(0,0)}^{k-1}(X,N) \quad \text{für } k \geq 2n+2$$

~ Durch Induktion über k folgt dann trivialerweise die Behauptung ! ■

~ Da $\text{DIFF}_{(0,0)}^{2n+1}(X,N)$ endlich erzeugt über $C^N(X, (0,0))$ ist, folgt sofort die Teilbehauptung (d) ! □

Korollar 5.12.: Für $N = (\omega, \omega)^*$ sei X Vereinigung zweier eindimensionaler N-differenzierbarer Mannigfaltigkeiten, die den Nullpunkt gemeinsam haben. Dann gilt:

$\text{DIFF}_{(0,0)}(X,N)$ ist immer endlich erzeugt !

Für die folgenden Betrachtungen sei

- (1) $K = \mathbb{R}$; $N = \infty$
- (2) $f \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$ eine in $0 \in \mathbb{R}$ flache Funktion
- (3) Um nicht zu viele Fälle unterscheiden zu müssen, wollen wir uns in dieser Arbeit auf diejenigen flachen Funktionen f beschränken, die in Bemerkung (5.13)(a),(b) behandelt werden !

Bemerkung 5.13.: Mit den bisherigen Bezeichnungen gilt :

- (a) Ist $f \neq 0$ und $(\text{Tr}(f), 0) = (\mathbb{R}, 0)$, so folgt :

$$N(X)_{(0,0)} = \langle y(y-f(x)) \rangle_{C^\infty(\mathbb{R}^2, (0,0))}$$

- (b) Ist $f \neq 0$ und $(\text{Tr}(f), 0) = (\mathbb{R}_0^+, 0)$ (bzw. $(\text{Tr}(f), 0) = (\mathbb{R}_0^-, 0)$), so folgt.

$$N(X)_{(0,0)} = \langle y(y-f(x)) \rangle ; y \cdot g(x) \forall g \in C^\infty(\mathbb{R}, 0), g(\mathbb{R}^+) \equiv 0 \rangle_{C^\infty(\mathbb{R}^2, (0,0))}$$

Beweis: (a) $g \in N(X)_{(0,0)} \leadsto$ Da $g|_{M_1} \equiv 0$ ist, gilt :

$\exists g_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^2, (0,0))$ mit $g(x,y) = y \cdot g_1(x,y)$

$\leadsto$ Da $g|_{M_2} \equiv 0$ und $(\text{Tr}(f), 0) = (\mathbb{R}, 0)$ ist, folgt : $g_1|_{M_1} \equiv 0$

$\leadsto \exists g_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2, (0,0))$ mit $g(x,y) = y(y-f(x))g_2(x,y)$

(b) $h \in N(X)_{(0,0)} \leadsto$ Da $h|_{M_2} \equiv 0$ ist, gilt :

$\exists h_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^2, (0,0))$ mit $h(x,y) = (y-f(x))h_1(x,y)$

$\leadsto$ Da $h|_{M_1} \equiv 0$ und $f(\mathbb{R}^-) \equiv 0$ ist, gilt : $h_1|_{\mathbb{R}^+ \times \{0\}} \equiv 0$

$\leadsto \exists h_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2, (0,0))$ und $g \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$, so daß

$h_1(x,y) = y h_2(x,y) + g(x)$ ist, wobei $g(\mathbb{R}^+) \equiv 0$ ist

$\leadsto$ Da $g(x)(y-f(x)) = yg(x)$ ist, folgt sofort die Behauptung. □

An dieser Bemerkung können wir schon erkennen, daß bei den nun betrachteten Fällen es durchaus vorkommen kann, daß das Nullstellenideal

$N(X)_{(0,0)}$ nicht endlich erzeugt ist.

Kommen wir nun zu den Einzelbetrachtungen :

4. Fall : $f \neq 0$ und $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $x^n f'(x) = g(x) \cdot f(x)$,

wobei $g \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$ mit $g(0) \neq 0$ ist !

O.E. gilt nach Koordinatentransformation : $|g(0)| = 1$

Bemerkung 5.14.: (a) Der Fall $n = 1$ kann nicht eintreten !

(b) Der Fall $g(0) = -1$ kann nicht auftreten !

Beweis: Unter den Voraussetzungen von (a) oder (b) kann $f \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$ mit $f \neq 0$ keine in 0 flache Funktion sein . □

Um eine Vorstellung über die Räume X zu bekommen, die wir in diesem Fall behandeln, betrachten wir das folgende

Beispiel 5.15.: Seien die folgenden C^∞ -Funktionen

$$(a) f_1(x) := \begin{cases} \exp(-x^{-2}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

$$(b) f_2(x) := \begin{cases} \exp(-x^{-1}) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

betrachtet. Für diese gilt:

$$(a) x^3 f_1'(x) = 2 f_1(x)$$

$$(b) x^2 f_2'(x) = f_2(x)$$

Bemerkung 5.16.: Es existieren Funktionen $g_t \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$ mit $g_t(0) = 1$,
so daß $x^{tn} f^{(t)}(x) = g_t(x) f(x)$ ist !

Beweis: durch Induktion über $t \in \mathbb{N}$!

(I.A.): $t = 1 \rightsquigarrow$ Mit $g_1(x) := g(x)$ folgt der Induktionsanfang !

(I.S.): $t \rightarrow (t+1)$

Nach Induktionsbehauptung gilt : $x^{tn} f^{(t)}(x) = g_t(x) f(x)$

$$\rightsquigarrow tn x^{tn-1} f^{(t)}(x) + x^{tn} f^{(t+1)}(x) = g_t'(x) f(x) + g_t(x) f'(x)$$

$$\rightsquigarrow x^{(t+1)n} f^{(t+1)}(x) = [x^n g_t'(x) - tn x^{n-1} g_t(x) + (g_t(x))^2] f(x)$$

$$\rightsquigarrow \text{Da } g_{t+1}(x) := (g_t(x))^2 + x^n g_t'(x) - tn x^{n-1} g_t(x)$$

und $g_{t+1}(0) = (g_t(0))^2 = (g_1(0))^{2^t} = 1$ ist, folgt die Behauptung □

Bemerkung 5.17.: Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq a$ existieren Funktionen $g_{a,b} \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind :

$$(1) x^{an} f^{(b)}(x) = g_{a,b}(x) f^{(b-a)}(x)$$

$$(2) g_{a,b}(0) = 1$$

Beweis: Da $x^{bn} f^{(b)}(x) = g_b(x) f(x)$ und $x^{(b-a)n} f^{(b-a)}(x) = g_{b-a}(x) f(x)$ ist, folgt mit $g_{a,b}(x) := g_b(x)/g_{b-a}(x)$ die Behauptung ! □

Satz 5.18.: Definiert man

$$\begin{aligned} D_1^* &:= D_1(x^n, g(x)) = x^n D_1^{1,0} + g(x) y D_1^{0,1} \\ D_2^* &:= D_2(x^n, g(x)) = x^n D_2^{2,0} + 2g(x) y D_1^{1,1} + g(x) f'(x) y D_1^{0,2} \\ &\quad + g'(x) y D_1^{0,1} - (g(x) - nx^{n-1}) D_1^{1,0} \end{aligned}$$

und für $l \geq 3$

$$D_l^* := \begin{cases} D_2^* \circ \dots \circ D_2^* \text{ (m-mal)} & \text{für } l = 2m \\ D_1^* \circ D_2^* \circ \dots \circ D_2^* \text{ ((m-1)-mal)} & \text{für } l = 2m-1 \end{cases}, \text{ so gilt}$$

mit den üblichen Bezeichnungen :

- (a) $\text{DIFF}_{(0,0)}^k(\mathbb{X}, \infty) = \langle 1; \tilde{D}_1; D_1^* \text{ für } l=1, \dots, k \rangle_{C^\infty(X, (0,0))}$ und ist damit $\forall k \in \mathbb{N}$ ein endlich erzeugter $C^\infty(X, (0,0))$ -Modul !
- (b) $\text{Gr}(\text{DIFF}_{(0,0)}(\mathbb{X}, \infty))$ ist keine endlich erzeugte Algebra !
- (c) $\text{DIFF}_{(0,0)}(\mathbb{X}, \infty)$ wird von $\text{DIFF}_{(0,0)}^2(\mathbb{X}, \infty)$ und damit von endlich vielen ∞ -Differentialoperatoren erzeugt !

Beweis: Es gilt :

Beh.1.: $\forall l \in \mathbb{N}$ und $j = 1, \dots, l$ gilt mit

$$A(l, j) := \begin{bmatrix} \frac{(l+j)!}{l!} & \frac{(l+j-1)!}{(l-1)!} & \dots & \frac{(l+1)!}{(l+1-j)!} & \frac{1!}{(1-j)!} \\ : & : & \dots & : & : \\ \frac{(l+j)!}{(l+j-1)!} & \frac{(l+j-1)!}{(l+j-2)!} & \dots & \frac{(l+1)!}{1!} & \frac{1!}{(1-1)!} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} :$$

$$\text{rang}(A(l, j)) = j+1$$

Beweis: durch Induktion über j ($1 \in \mathbb{N}$ beliebig !)

(I.A.): $j = 1$

$$\sim \text{rang} \begin{bmatrix} (1+1) & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \quad \forall 1 \in \mathbb{N}$$

(I.S.): $(j-1) \rightarrow j$

Multipliziert man die i -te Zeile von $A(1, j)$ mit $(1+(i-1))$ und subtrahiert diese dann von der $(i-1)$ -ten Zeile (für $i \geq 2$), so ergibt sich die folgende zu $A(1, j)$ äquivalente Matrix :

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{(1+(j-1))!}{1!} & \dots & -j \frac{1!}{(1+1-j)!} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & -\frac{(1+(j-1))!}{(1+j-2)!} & \dots & -j \frac{1!}{(1-1)!} \\ 0 & -1 & \dots & -j \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \\ \hline 1 & -1 & -1/2 & \dots & -1/j \end{array} \right] \begin{array}{l} A(1, j-1) \\ \hline \end{array}$$

$\sim$ Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann :

$$\text{rang}(A(1, j)) = j+1$$

■

Beh.2.: Für $k, i \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2i$ gilt mit

$$\tilde{A}(k, i) := \begin{bmatrix} \binom{k}{k-i} & \binom{k-1}{k-i-1} & \dots & \binom{k+1-i}{k+1-2i} & \binom{k-i}{k-2i} \\ \binom{k}{k+1-i} & \dots & \dots & \dots & \binom{k-i}{k+1-2i} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \binom{k}{k-1} & \dots & \dots & \dots & \binom{k-i}{k-i-1} \\ \binom{k}{k} & \binom{k-1}{k-1} & \dots & \dots & \binom{k-i}{k-i} \end{bmatrix}$$

$$\text{rang}(\tilde{A}(k, i)) = i+1$$

Beweis: Es gilt :

$$\tilde{A}(k,i) = \begin{bmatrix} \frac{k!}{(k-i)! i!} & \dots & \frac{(k-i)!}{(k-2i)! i!} \\ \frac{k!}{(k+1-i)! (i-1)!} & \dots & \frac{(k-i)!}{(k+1-2i)! (i-1)!} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{k!}{(k-1)! 1!} & \dots & \frac{(k-i)!}{(k-i-1)! 1!} \\ \frac{k!}{k! 0!} & \dots & \frac{(k-i)!}{(k-i)! 0!} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{k!}{(k-i)!} & \dots & \frac{(k-i)!}{(k-2i)!} \\ \frac{k!}{(k+1-i)!} & \dots & \frac{(k-i)!}{(k+1-2i)!} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{k!}{(k-1)!} & \dots & \frac{(k-i)!}{(k-i-1)!} \\ \frac{k!}{k!} & \dots & \frac{(k-i)!}{(k-i)!} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A(k-i,i) ,$$

woraus dann mit Hilfe von Behauptung (1) die Behauptung (2) folgt .

Sei $D := \sum_{i+j \leq k} a_{i,j} D^{i,j}$ ein beliebiger ∞ -DO k-ter Ordnung auf X.

~ (1) $a_{i,j}|_{M_1} \equiv 0$ für $j > 0$

(2) Modulo $\text{DIFF}_{(0,0)}^{k-1}(X,\infty)$ ist dann D durch $a_{k,0}$ eindeutig bestimmt !

Wie in Satz (5.11) werden wir im folgenden versuchen, alle C^∞ -Funktionen $a_{k,0}$ zu bestimmen, für die mindestens ein $\tilde{D} \in \text{DIFF}_{(0,0)}^{k-1}(M_2,\infty)$ existiert, so daß

$$(*) \quad a_{k,0} \tilde{D}_k + \tilde{D}$$

in natürlicher Weise einen DO auf X darstellt.

Da $D := \tilde{D}_k = y \tilde{D}_k$ ebenfalls wieder ein DO auf X ist, nehmen wir O.E. an :
 $a_{k,0}(x,y) := a_{k,0}(x)$

Angenommen: Die $\odot$ -Bedingung wäre für $a_{k,0}(x) = x^{\tilde{j}_0} := x^{j_0 n + (n-1)}$ erfüllt, wobei $j_0 := [\frac{k-1}{2}]$ ist.

(Gäbe es eine niedrige x -Potenz, für die die $\odot$ -Bedingung erfüllt wäre, so müßte diese Eigenschaft auch für $\tilde{j}_0$ erfüllt sein !)

~ Für $i = 0, \dots, j_0$ gilt mit den analogen Bezeichnungen von Satz (5.8) für die Koeffizienten $\tilde{p}_{(k-i)-1-1,1}^{k-i}$ von $x^{(j_0-i)n+n-1} \tilde{D}_{k-i}$:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{(k-i)-1-1,1}^{k-i}(x) &= \binom{k-i}{l+1} x^{n-1} f^{(l+1)} x^{(j_0-i)n} \\ &= \binom{k-i}{l+1} x^{n-1} g_{j_0-i, l+1}(x) f^{(l+1-j_0+i)} \\ &\quad \text{für } l=0, \dots, k-1 \quad \text{und} \quad (l+1) \geq (j_0-i) \end{aligned}$$

~ Für die Differentialoperatoren $x^{\tilde{j}_0} \tilde{D}_k; x^{\tilde{j}_0-n} \tilde{D}_{k-1}; \dots; x^{n-1} \tilde{D}_{k-j_0}$ gilt dann also:

- (1) Die entsprechenden Koeffizienten von $D^{t,1}$ haben jeweils die gleichen Ableitungsgrade von f und die gleichen x -Potenzen!
- (2) Es tauchen nur die Ableitungsgrade $f'; f''; \dots; f^{(k-j_0)}$ bei diesen Differentialoperatoren auf!

~ Da $a_{k,0}(x) = x^{\tilde{j}_0}$ die $\odot$ -Bedingung erfüllt, gilt:

$\exists$ Funktion $b := (b_0, \dots, b_{j_0}) \in (C^\infty(\mathbb{R}, 0))^{j_0+1}$ mit $b_0(0) \neq 0$, so daß mit

$$B(x) := \begin{bmatrix} \binom{k}{j_0+1} \cdot g_{j_0, j_0+1}(x) & \dots & \binom{k+1-j_0}{2} \cdot g_{1,2}(x) & \binom{k-j_0}{1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \binom{k}{k} \cdot g_{j_0, k}(x) & \dots & \binom{k+1-j_0}{k+1-j_0} \cdot g_{1, k-j_0+1}(x) & \binom{k-j_0}{k-j_0} \end{bmatrix}$$

die Beziehung $B(x) b(x) \equiv 0$ erfüllt ist!

1. Fall: k gerade ~ $j_0 = \frac{k}{2} - 1$

~ Damit ergibt sich für $B(0)$ die folgende Matrix:

$$\begin{bmatrix} \binom{k}{k/2} & \dots & \binom{1+(k/2)}{1} \\ \vdots & & \vdots \\ \binom{k}{k} & \dots & \binom{1+(k/2)}{1+(k/2)} \end{bmatrix}$$

~ Läßt man von $B(0)$ die erste Zeile weg, so entspricht die so entstandene $(k/2) \times (k/2)$ -Matrix der in Behauptung (2) definierten Matrix $\tilde{A}(k, (k/2)-1)$ und hat damit maximalen Rang !

~ $b(0) = (0, \dots, 0)$

~ $\#$ (da $b_0(0) \neq 0$ nach Voraussetzung !)

2.Fall: k ungerade ~ $j_0 = \frac{k}{2} - \frac{1}{2}$

~ Da $B(0) = \tilde{A}(k, k/2)$ ist, also maximalen Rang hat, folgt :

$b(0) = (0, \dots, 0)$

~ $\#$ (da $b_0(0) \neq 0$ nach Voraussetzung !)

~ Mit dieser Überlegung ergibt sich :

Beh.3.: Für $l := [\frac{k+1}{2}]$ gilt : $a_{k,0} \in < y ; x^{1n} >_{C^\infty(X, (0,0))}$

~ Da für $D := \tilde{D}_k$ der Koeffizient $a_{k,0}(x,y) = y$ und für $D := D_k^*$ der Koeffizient $a_{k,0}(x,y) = x^{1n}$ ist, folgt die Teilbehauptung (a) !

(b) Die Argumentation ist die gleiche wie in Satz (5.11)(c) !

(c) Definiert man sukzessive

$$P_k^1 := \left\{ \begin{array}{ll} \tilde{D}_2 \circ D_2^* & - D_2^* \circ \tilde{D}_2 \quad \text{für } k = 3 \\ P_{k-1}^1 \circ D_2^* & - D_2^* \circ P_{k-1}^1 \quad \text{für } k > 3 \end{array} \right\} ,$$

so gilt mit den Bezeichnungen von Bemerkung (5.10) :

$\tilde{D}_2$, P_k^1 für $k > 3$ sind ∞ -DO der in Bemerkung (5.10) geforderten Form !

~ Mit $\hat{g}_2(x) := 1$, $\hat{g}_{k+1}(x) = k\hat{g}_k(x)x^{n-1} - 2x^n \hat{g}'_k(x) - 2g(x) \hat{g}_k(x)$ für

$k \geq 2$ folgt, da $\hat{g}_{k+1}(0) = -2g(0)\hat{g}_k(0) \in \mathbb{R} - \{0\}$ ist :

$\frac{1}{\hat{g}_k} P_k^1 - \tilde{D}_k \in \text{DIFF}_{(0,0)}^{k-1}(\mathbb{X}, \infty)$ für $k \geq 3$!

~ Da $\text{DIFF}_{(0,0)}^2(\mathbb{X}, \infty)$ von 1 ; $\tilde{D}_1$; $\tilde{D}_2$; D_1^* ; D_2^* über $C^\infty(X, (0,0))$ erzeugt wird, folgt mit Induktion über k sofort die Teilbehauptung (c) !

5. Fall : $f \neq 0$; f erfülle für kein $n \in \mathbb{N}$ die Voraussetzung von Fall (4),
 aber : $\exists P \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$, P flache Funktion in $0 \in \mathbb{R}$, mit

$$P(x) f'(x) = f(x) \quad !$$

Bemerkung 5.19.: Es gilt :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k_n \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$ mit $k_n(0) = 1$, so daß

$$(P(x))^n f^{(n)}(x) = k_n(x) f(x) \quad \text{ist !}$$

Beweis: durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$!

(I.A.): $n = 1$ ~ Mit $k_1(x) := 1$ folgt der Induktionsanfang !

(I.S.): $n \rightarrow (n+1)$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt : $f(x) k_n(x) = (P(x))^n f^{(n)}(x)$

$$\sim k_n(x) f'(x) + k_n'(x) f(x) = n(P(x))^{n-1} P'(x) f^{(n)}(x) + (P(x))^n f^{(n+1)}(x)$$

$$\sim (P(x))^{n+1} f^{(n+1)}(x) = k_n(x) P(x) f'(x) + P(x) k_n'(x) f(x)$$

$$\quad - n P'(x) (P(x))^n f^{(n)}(x)$$

$$= [k_n(x) + P(x) k_n'(x) - n P'(x) k_n(x)] f(x)$$

$$\sim \text{Mit } k_{n+1}(x) := - n P'(x) k_n(x) + k_n(x) + P(x) k_n'(x) \text{ folgt, da}$$

$$k_{n+1}(0) = k_n(0) = 1 \text{ ist, die Behauptung !}$$

□

Bemerkung 5.20.: $\forall a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \leq b$ gilt :

$\exists k_{a,b} \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$, so daß

$$(1) (P(x))^a f^{(b)}(x) = k_{a,b}(x) f^{(b-a)}(x)$$

$$(2) k_{a,b}(0) = 1 \quad \text{ist!}$$

Beweis: Mit $k_{a,b}(x) := \frac{k_b(x)}{k_{b-a}(x)}$ folgt die Behauptung sofort aus Bemerkung
 (5.19.) !

□

Bemerkung 5.21.: (a) Erfüllt f zusätzlich noch die Voraussetzung von Bemerkung (5.13.)(a), so ist P eindeutig bestimmt !

(b) Erfüllt f die Voraussetzung von Bemerkung (5.13.)(b), so ist P nicht eindeutig bestimmt !

Es gilt aber im Fall (b) zum Beispiel für $(\text{Tr}(f), 0) = (\mathbb{R}_0^+, 0)$:

Wählt man P so, daß $P(\mathbb{R}^-) = 0$ ist, so entspricht die Menge $\{Q \in C^\infty(\mathbb{R}, 0) \mid Q \text{ ist flach in } 0 \in \mathbb{R} \text{ mit } Q(x) f'(x) = f(x)\}$ der Menge $\{Q \in C^\infty(\mathbb{R}, 0) \mid Q(x) = P(x) + g(x) \text{ mit } g(\mathbb{R}^+) = 0\}$!

Da diese beiden in Bemerkung (5.21.) unterschiedenen Fälle auch unterschiedliche Aussagen zur Endlichkeit der Moduln $\text{DIFF}_{(0,0)}^k(\mathbb{X}, \infty)$ zur Folge haben, untersuchen wir dies beiden Fälle im folgenden getrennt !

5.1. Fall : $(\text{Tr}(f), 0) = (\mathbb{R}, 0)$ (und die Voraussetzungen des 5. Falles)

Beispiel 5.22.: Mit den Bezeichnungen von Beispiel (5.15) sei die Funktion $g := f_1 \circ f_1 \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$ definiert.

Für diese gilt :

(1) g ist eine in $0 \in \mathbb{R}$ flache Funktion

(2) $(\text{Tr}(g), 0) = (\mathbb{R}, 0)$

(3) $g'(x) = f_1'(f_1(x)) \cdot f_1'(x)$

~ Da $x^3 \cdot f_1'(x) = 2 \cdot f_1(x)$ ist, gilt: $\frac{(f_1(x))^2 \cdot x^3}{4} \cdot g'(x) = g(x)$

Satz 5.23.: Definiert man

$$D_1^* := D_1(P, 1) = P D^{1,0} + y D^{0,1} ,$$

$$D_2^* := D_2(P, 1) = P D^{2,0} + 2y D^{1,1} + f' P y D^{0,2} - (1 - P') D^{1,0}$$

und für $l \geq 3$

$$D_l^* := \begin{cases} D_2^* \circ \dots \circ D_2^* \quad (m-1) & \text{für } l = 2m \\ D_1^* \circ D_2^* \circ \dots \circ D_2^* \quad ((m-1)-1) & \text{für } l = 2m-1 \end{cases} ,$$

so gilt mit den üblichen Bezeichnungen :

(a) $\text{DIFF}_{(0,0)}^k(\mathbb{X}, \infty) = \langle 1 ; \tilde{D}_1^* , D_1^* \quad l=1, \dots, k \rangle_{C^\infty(X, (0,0))}$ und ist damit für alle $k \in \mathbb{N}$ ein endlich erzeugter $C^\infty(X, (0,0))$ -Modul !

(b) $\text{Gr}(\text{DIFF}_{(0,0)}(\mathbb{X}, \infty))$ ist keine endlich erzeugte Algebra !

(c) $\text{DIFF}_{(0,0)}^2(\mathbb{X}, \infty)$ wird von $\text{DIFF}_{(0,0)}^2(\mathbb{X}, \infty)$ und damit von den Elementen $1 ; \tilde{D}_1^* ; \tilde{D}_2^* ; D_1^* ; D_2^*$ erzeugt !

Beweis: (a) Sei $D := \sum_{i+j \leq k} a_{i,j} D^{i,j}$ ein beliebiger ∞ -DO k-ter Ordnung über X .

~ Wie in Satz (5.18) werden wir wieder alle C^∞ -Funktionen $a_{k,0}$ bestimmen, für die mindestens ein $\tilde{D} \in \text{DIFF}_{(0,0)}^{k-1}(M_{2,\infty})$ existiert, so daß

$$(*) \quad a_{k,0} \tilde{D}_k + \tilde{D}$$

in natürlicher Weise einen Differentialoperator auf X darstellt.

O.E. sei $a_{k,0}(x,y) := a_{k,0}(x)$ (da $y \tilde{D}_k \in \text{DIFF}_{(0,0)}^k(M_{2,\infty})$ ist)

Angenommen: Die $(*)$ -Bedingung wäre für $a_{k,0}(x) = h(x) (P(x))^{j_0}$ erfüllt,

wobei $j_0 := \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$ und $h \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$ mit $h \notin \langle P \rangle_{C^\infty(\mathbb{R}, 0)}$ ist!

~ Für $i = 0, \dots, j_0$ gilt mit den zu Satz (5.8) analogen Bezeichnungen für die Koeffizienten $\tilde{p}_{(k-i)-1-1,1}^{k-i}$ von $h(P)^{j_0-i} \tilde{D}_{k-i}$:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{(k-i)-1-1,1}^{k-i} &= h(x) \binom{k-i}{1+1} f^{(1+1)}(x) (P(x))^{j_0-i} \\ &= h(x) \binom{k-i}{1+1} f^{(1+1-j_0+i)}(x) k_{j_0-i,1+1}(x) \\ &\quad \text{für } l=0, \dots, k-1 \text{ und } (1+l) \geq (j_0-i) \end{aligned}$$

~ Für die Differentialoperatoren $h \cdot (P)^{j_0} \tilde{D}_k$, $h \cdot (P)^{j_0-1} \tilde{D}_{k-1}, \dots, h \cdot \tilde{D}_{k-j_0}$ gilt dann also:

- (1) Die entsprechenden Koeffizienten von $D^{t,1}$ weisen bei den obigen DO jeweils die gleichen Ableitungsgrade auf!
- (2) Es tauchen nur die Ableitungsgrade $f', f'', \dots, f^{(k-j_0)}$ bei diesen DO auf!

~ Da $a_{k,0}(x) = h(x) \cdot (P(x))^{j_0}$ die $(*)$ -Bedingung erfüllt, gilt:

$\exists$ Funktion $b := (b_0, \dots, b_{j_0}) \in (C^\infty(\mathbb{R}, 0))^{j_0+1}$ mit $b_0(0) \neq 0$, so daß mit

$$B(x) := \begin{bmatrix} \binom{k}{j_0+1} k_{j_0, j_0+1}(x) & \dots & \binom{k+1-j_0}{2} k_{1,2}(x) & \binom{k-j_0}{1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \binom{k}{k} k_{j_0, k}(x) & \dots & \binom{k+1-j_0}{k+1-j_0} k_{1, k-j_0+1}(x) & \binom{k-j_0}{k-j_0} \end{bmatrix}$$

die Beziehung $Bb \equiv 0$ gilt!

~ Da $k_{i,j}(0) = 1 \quad \forall i \leq j$ ist, folgt mit der analogen Betrachtung wie in Satz (5.18)(a):

$$b(0) = (b_0(0), \dots, b_{j_0}(0)) = (0, \dots, 0)$$

~ ~~||~~ (da nach Voraussetzung $b_0(0) \neq 0$ sein muß !)

~ Damit ergibt sich :

Beh.1.: Mit $l := \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ ist $a_{k,0} \in \langle y ; P^1 \rangle_{C^\infty(X, (0,0))}$!

~ Da für $D := \tilde{D}_k$ der Koeffizient $a_{k,0}(x,y) = y$ und für $D := D_k^*$ der Koeffizient $a_{k,0}(x,y) = (P(x))^{-1}$ ist, folgt die Teilbehauptung (a) !

(b) Die Argumentation entspricht der in Satz (5.18)(b) benutzten !

(c) Definiert man sukzessive

$$P_k^1 := \begin{cases} \tilde{D}_2 \circ D_2^* - D_2^* \tilde{D}_2 & \text{für } k = 3 \\ P_{k-1}^1 \circ D_2^* - D_2^* P_{k-1}^1 & \text{für } k \geq 4 \end{cases},$$

so gilt mit den Bezeichnungen von Bemerkung (5.10) :

(1) $\tilde{D}_2, P_k^1$ für $k \geq 4$ sind ∞ -DO, die der Form des Operators D in Bemerkung (5.10.) entsprechen !

(2) Mit $\tilde{g}_2(x) := 1$ und $\tilde{g}_{k+1}(x) = k\tilde{g}_k(x) P'(x) - 2P(x) \tilde{g}_k'(x) - 2\tilde{g}_k(x)$ für $k \geq 2$ gilt dann :

$$\tilde{g}_k(0) \neq 0 \quad \forall k \geq 2$$

$$\sim \left(\frac{1}{\tilde{g}_k} \right) P_k^1 - \tilde{D}_k \in \text{DIFF}_{(0,0)}^{k-1}(\mathbb{X}, \infty)$$

~ Da die ∞ -DO D_k^* für alle $k \in \mathbb{N}$ nach Definition von D_1^*, D_2^* erzeugt werden, folgt :

$$\text{DIFF}_{(0,0)}^2(\mathbb{X}, \infty), \text{ d.h. genauer die } \infty\text{-DO } 1 ; \tilde{D}_1 ; \tilde{D}_2 ; D_1^* ; D_2^* \text{ erzeugen } \text{DIFF}_{(0,0)}(\mathbb{X}, \infty) !$$

□

5.2. Fall : O.E. $(\text{Tr}(f), 0) = (R_0^+, 0)$ und $\exists P \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$, P flach in $0 \in \mathbb{R}$, mit $P(x) f'(x) = f(x)$!

O.E. wollen wir im folgenden mit P diejenige Funktion bezeichnen, die die obige Eigenschaft erfüllt und für die $P(\mathbb{R}^-) \equiv 0$ ist !

Beispiel 5.24.: Mit den Bezeichnungen von Beispiel (5.15) sei durch $h := f_2 \circ f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften definiert :

- (1) h ist eine in $0 \in \mathbb{R}$ flache Funktion !
- (2) $(\text{Tr}(f_2), 0) = (\mathbb{R}_0^+, 0)$
- (3) Da $x^2 f_2'(x) = f_2(x)$ ist, folgt : $x^2 f_2'(x) h'(x) = h(x) !$

Für die folgende Betrachtung sei

$$N^+ := \{g \in C^\infty(\mathbb{R}, 0) \mid g(\mathbb{R}^+) \equiv 0\} !$$

Satz 5.25.: Definiert man in der üblichen Weise

$$D_1^* := D_1(P, 1) = P D^{1,0} + y D^{0,1} ,$$

$$D_2^* := D_2(P, 1) = P D^{2,0} + 2y D^{1,1} + f' P y D^{0,2} - (1 - P') D^{1,0}$$

und für $l \geq 3$

$$D_l^* := \left\{ \begin{array}{ll} D_2^* \circ \dots \circ D_2^* & (m - \text{mal}) \quad \text{für } l = 2m \\ D_1^* \circ D_2^* \circ \dots \circ D_2^* & ((m-1) - \text{mal}) \quad \text{für } l = 2m-1 \end{array} \right\} ,$$

so gilt mit den bisher benutzten Bezeichnungen :

- (a) $\text{DIFF}_{(0,0)}^k(\mathbb{Y}, \infty) := \langle 1; \tilde{D}_1^*; D_1^*; g D^{1,0} \text{ für } l=1, \dots, k, g \in N^+ \rangle_{C^\infty(X, (0,0))}$
und ist damit $\forall k \in \mathbb{N}$ kein endlich erzeugter $C^\infty(X, (0,0))$ -Modul !
- (b) $\text{Gr}(\text{DIFF}_{(0,0)}(\mathbb{Y}, \infty))$ ist keine endlich erzeugte Algebra !
- (c) $\text{DIFF}_{(0,0)}(\mathbb{Y}, \infty)$ wird von $1, \tilde{D}_1, \tilde{D}_2, D_1^*, D_2^*$ erzeugt !!

Beweis: (a) Wie wir in Bemerkung (5.21) (b) gesehen haben, hat jedes $Q \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$ mit $Q(x) f'(x) = f(x)$ die Form $Q(x) = P(x) + g(x)$, $g \in N^+$.
~ Da aber $\forall g \in N^+$ und $\forall i \in \mathbb{N}_0$

$$g f^{(i)}|_X = y g|_X \equiv 0$$

ist, folgt die Teilbehauptung (a) aus der entsprechenden Untersuchung im Fall 5.1 (siehe Satz (5.23)(a)) !

(b) Die Argumentation entspricht der in Satz (5.18)(b) benutzten !

(c) Mit der entsprechenden Untersuchung wie in Satz (5.23)(c) erkennt man, daß die ∞ -DO $\tilde{D}_1$ und D_1^* für alle $l \in \mathbb{N}$ von den ∞ -DO $1, \tilde{D}_1, \tilde{D}_2, D_1^*, D_2^*$ erzeugt werden.

Da aber $P(\mathbb{R}^-) = f^{(i)}(\mathbb{R}^-) = 0$ ist, folgt $\forall g \in N^+$:

$$g D_2^* = P g D^{2,0} + 2 g y D^{1,1} + g f' P y D^{0,2} - (1 - P') g D^{1,0} \\ = -g D^{1,0} \quad \text{auf } X$$

und analog $g D_{2m}^* = (-1)^m g D^{m,0} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \text{auf } X !$

$\sim$ Die $\infty D_0 \quad 1 ; \tilde{D}_1 ; \tilde{D}_2 ; D_1^* ; D_2^*$ erzeugen $\text{DIFF}_{(0,0)}(\mathbb{X}, \infty) !!$

□

Korollar 5.26.: Die Endlichkeit der Moduln $\text{DIFF}_0^k(\mathbb{X}, \infty)$ ist keine notwendige Voraussetzung für die positive Beantwortung der Malgrangschen Frage; d.h. :

Es existieren ∞ -differenzierbare Räume, deren Moduln $\text{DIFF}_0^k(\mathbb{X}, \infty)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ nicht endlich, aber $\text{DIFF}_0(\mathbb{X}, \infty)$ endlich erzeugt wird !

Um zu zeigen, daß es auch Klassen von flachen Funktionen geben kann, für die $\text{DIFF}_{(0,0)}(\mathbb{X}, \infty)$ nicht endlich erzeugt ist, betrachten wir abschließend

6. Fall : f erfülle weder die Voraussetzungen von Fall (4) noch von Fall (5), aber :

$\forall P_1 \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$, P_1 flach in $0 \in \mathbb{R}$, $\exists P_2 \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$, P_2 ebenfalls flach in $0 \in \mathbb{R}$, so daß

$$P_1(x) f'(x) = P_2(x) f(x) \quad \text{ist !}$$

Bemerkung 5.27.: $\forall P \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$, P flach in $0 \in \mathbb{R}$, $\exists (P)_n \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$, $(P)_n$ ebenfalls flach in $0 \in \mathbb{R}$, so daß

$$P(x) f^{(n)}(x) = (P)_n f(x) \quad \text{ist !}$$

Beweis: durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$!

(I.A.): $n = 1 \sim$ Folgt sofort nach den Voraussetzungen dieses Falles !

(I.S.): $n \rightarrow (n+1)$

Es gilt nach Induktionsvoraussetzung : $P(x) f^{(n)}(x) = (P)_n f(x)$

$$\sim P'(x) f^{(n)}(x) + P(x) f^{(n+1)}(x) = (P)_n'(x) f(x) + (P)_n(x) f'(x)$$

$$\sim P(x) f^{(n+1)}(x) = [(P)_n'(x) + ((P)_n)_1(x) - (P')_n(x)] f(x), \text{ woraus}$$

mit $(P)_{n+1}(x) = (P)_n'(x) + ((P)_n)_1(x) - (P')_n(x)$ die Behauptung folgt .

□

Um zu erkennen, welche Räume insbesondere zu diesem Fall gehören, betrachten wir das folgende

Beispiel 5.28.: Definiert man

$$f_3(x) := \begin{cases} \exp(-x^{-3/2}) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases} \quad , \text{ so gilt :}$$

(1) $f_3 \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$, f_3 flach in $0 \in \mathbb{R}$

(2) $(\text{Tr}(f_3), 0) = (\mathbb{R}_0^+, 0)$

(3) Für $x \geq 0$ ist $\frac{2}{3} x^{5/2} f_3'(x) = f_3(x)$.

~ (a) f_3 erfüllt nicht die Voraussetzungen der Fälle (4), (5) !

(b) $\forall P \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$, P flach in $0 \in \mathbb{R}$ gilt :

$\exists (P)_1 \in C^\infty(\mathbb{R}, 0)$, $(P)_1$ flach in $0 \in \mathbb{R}$, so daß

$$P(x) f_3'(x) = (P)_1(x) f_3(x) \quad \text{ist !}$$

Für die folgende Betrachtung sei

$$FL := \{P \in C^\infty(\mathbb{R}, 0) \mid P \text{ flach in } 0 \in \mathbb{R}\} \quad !$$

Satz 5.29.: Definiert man $D_1(P)$ als denjenigen Operator auf X , der dadurch entstanden ist, daß man beim Operator $P \tilde{D}_1$ jeweils $P f^{(i)}$ durch $(P)_1 y$ für $i \in \mathbb{N}$ und $P \in FL$ ersetzt, so ergibt sich :

(a) $\text{DIFF}_{(0,0)}^k(X, \infty) = < 1 ; \tilde{D}_1 , D_1(P) \mid 1=1, \dots, k , \forall P \in FL >_{C^\infty(X, (0,0))}$

und ist damit für alle $k \in \mathbb{N}$ kein endlich erzeugter $C^\infty(X, (0,0))$ -Modul!

(b) $\text{Gr}(\text{DIFF}_{(0,0)}(X, \infty))$ ist keine endlich erzeugte Algebra !

(c) $\text{DIFF}_{(0,0)}(X, \infty)$ ist nicht endlich erzeugt !!

Beweis: (a) Sei $D := \sum_{i+j=k} a_{i,j} D^{i,j}$ ein Differentialoperator k -ter Ordnung auf X !

~ Dann ist D durch $a_{k,0}$ modulo $\text{DIFF}_{(0,0)}^{k-1}(X, \infty)$ eindeutig bestimmt .

~ Im folgenden werden wir wieder versuchen, alle $a_{k,0}$ zu bestimmen, für die mindestens ein $\tilde{D} \in \text{DIFF}_{(0,0)}(M_2, \infty)$ existiert, so daß

$$(*) \quad a_{k,0} \tilde{D}_k + \tilde{D}$$

in natürlicher Weise einen Differentialoperator auf X darstellt .

O.E. sei $a_{k,0}(x,y) := a_{k,0}(x)$ (da $\tilde{D}_k \in \text{DIFF}_{(0,0)}^k(X,\infty)$ ist)

Angenommen: $\exists a_{k,0} \in C^\infty(R,0)$, $a_{k,0}$ nicht flach in $0 \in R$, und $a_{k,0}$ erfüllt die $\odot$ -Bedingung.

$\sim$ Da kein $h \in C^\infty(R,0)$ existiert mit $a_{k,0} f' = h f$, und der Koeffizient von $D^{k-1,1}$ des Differentialoperators $a_{k,0} \tilde{D}_k$ die Form

$k a_{k,0} f'$ hat, also nicht so umgeformt werden kann, daß der Koeffizient von $D^{k-1,1}$ auf M_1 verschwindet, folgt der Widerspruch !!

$\sim a_{k,0}$ muß notwendig eine in 0 flache Funktion sein

$\sim$ Mit der in Satz (5.29) angegebenen Konstruktion für die Differentialoperatoren $D_k(P) \quad \forall P \in FL$ folgt dann die Teilbehauptung (a) !

(b) Die Argumentation entspricht der in Satz (5.18)(b) benutzten !

(c) Es gilt :

Beh.1.: Seien $g, h \in C^\infty(X, (0,0))$. Dann gilt für den ∞ -DO

$$h \tilde{D}_1 \circ g \tilde{D}_k := \sum_{i+j \leq 1+k} a_{i,j} D^{i,j} :$$

$$a_{t,0} \in \langle y^2 \rangle ; P \cdot y \quad \forall P \in FL \rangle_{C^\infty(X, (0,0))} \quad \text{für } 1 \leq t \leq 1+k$$

Beweis: Da wir nur $a_{t,0}$ betrachten wollen, reicht es, $h \tilde{D}_1 \circ (g y D^{k,0})$ zu betrachten.

Da bis auf den Koeffizienten von $D^{1,0}$ die Koeffizienten des Operators $\tilde{D}_1$ schon aus $\langle y^2 \rangle ; P \cdot y \quad \forall P \in FL \rangle_{C^\infty(X, (0,0))}$ sind und

$$y D^{1,0} \circ [g(x,y) \cdot y D^{k,0}] = y^2 \cdot D^{1,0} \circ [g(x,y) \cdot D^{k,0}] \text{ ist,}$$

folgt sofort die Behauptung !

Beh.2.: Seien $g, h \in C^\infty(X, (0,0))$ und $Q \in FL$ beliebig. Dann gilt für den DO

$$h \tilde{D}_1 \circ g D_k(Q) := \sum_{i+j \leq 1+k} a_{i,j} D^{i,j} :$$

$$a_{t,0} \in \langle P \cdot y \quad \forall P \in FL \rangle_{C^\infty(X, (0,0))} \quad \text{für } 1 \leq t \leq 1+k$$

Beweis: Es reicht wieder aus, nur $h \tilde{D}_1 \circ (g Q D^{k,0})$ zu betrachten !

$$\text{Da } h y D^{1,0} \circ [g \cdot Q \cdot D^{k,0}] = \sum_{0 \leq s \leq 1} \binom{1}{s} h \cdot y \cdot (D^{s,0}(P \cdot g)) D^{k+1-s,0} ,$$

folgt, da bis auf den Koeffizienten von $D^{1,0}$ die Koeffizienten des Operators $\tilde{D}_1$ schon aus $\langle P, y \mid \forall P \in FL \rangle_{C^\infty(X, (0,0))}$ sind, sofort die Behauptung!

Beh.3.: Seien $g, h \in C^\infty(X, (0,0))$ und $Q \in FL$ beliebig. Dann gilt für den DO

$$h D_1(Q) \circ g \tilde{D}_k := \sum_{i+j \leq 1+k} a_{i,j} D^{i,j} :$$

$$a_{t,0} \in \langle P, y \mid \forall P \in FL \rangle_{C^\infty(X, (0,0))} \text{ für } 1 \leq t \leq 1+k$$

Beweis: Ähnliche Betrachtung wie bei Behauptung (1) bzw. (2)!

Beh.4.: Seien $g, h \in C^\infty(X, (0,0))$ und $Q_1, Q_2 \in FL$. Dann gilt für den DO

$$h D_1(Q_1) \circ g D_k(Q_2) := \sum_{i+j \leq 1+k} a_{i,j} D^{i,j} :$$

$$a_{t,0} \in \langle P, y \mid P_1 \cdot P_2 \mid \forall P, P_1, P_2 \in FL \rangle_{C^\infty(X, (0,0))} \text{ für } 1 \leq t \leq 1+k$$

Beweis: Ähnliche Betrachtung wie bei Behauptung (1) bzw. (2)!

Beh.5.: Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig und $DF^k \subset \text{DIFF}_{(0,0)}^k(X, \infty)$ diejenige Menge von Differentialoperatoren, die von $\text{DIFF}_{(0,0)}^k(X, \infty)$ im „Malgrangschen Sinne“ erzeugt werden (siehe Einleitung zu diesem Paragraphen).

Dann gilt für ein beliebiges

$$D := \sum_{i+j \leq m} a_{i,j} D^{i,j} \in DF^k \text{ mit } m \geq k :$$

$$a_{t,0} \in \langle y^2 \mid P, y \mid P_1 \cdot P_2 \mid \forall P, P_1, P_2 \in FL \rangle_{C^\infty(X, (0,0))} \text{ für } k < t \leq m$$

Beweis: folgt aus den Behauptungen (1) - (4)!

Mit diesen Hilfsmitteln können wir nun die Teilbehauptung (c) beweisen.

Angenommen: $\text{DIFF}_{(0,0)}(X, \infty)$ wäre endlich erzeugt!

$\sim \exists k \in \mathbb{N}$, so daß alle Erzeugenden aus $\text{DIFF}_{(0,0)}^k(X, \infty)$ sind

$$\sim DF^k = \text{DIFF}_{(0,0)}(X, \infty)$$

$$\sim \neq, \text{ da } \tilde{D}_{k+1} = y \tilde{D}_{k+1} \notin DF^k \text{ (nach Behauptung (5))}$$

Bevor die Ergebnisse dieses Paragraphen in einer Tabelle zusammengefaßt werden, möchte ich noch auf ein „Phänomen“ der Differentialoperatoren aufmerksam machen, daß allen bisherigen geometrischen Erfahrungen widerspricht.

Beispiel 5.30.: Betrachtet man die folgenden C^∞ -Funktionen

$$(a) \ h_1(x) := \begin{cases} \exp(-x^{-2}) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases} ,$$

$$(b) \ h_2(x) := \begin{cases} \exp(-x^{-3/2}) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases} ,$$

$$(c) \ h_3(x) := \begin{cases} \exp(-x^{-1}) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases} ,$$

so gilt mit $X_i := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y(y - h_i(x)) = 0\} \quad i=1,\dots,3$:

$$(1) \ h_1(x) \leq h_2(x) \leq h_3(x) \quad \forall x \in (\mathbb{R}, 0)$$

(2) Aber: $\text{DIFF}_{(0,0)}(X_1, \infty)$ und $\text{DIFF}_{(0,0)}(X_3, \infty)$ sind endlich, aber
 $\text{DIFF}_{(0,0)}(X_2, \infty)$ ist nicht endlich erzeugt !!!

Dies bedeutet also, daß, obwohl h_1 sich flacher der x-Achse nähert als h_2 , die Malgrangsche Frage für den „geometrisch komplizierteren Fall“ positiv, für den „geometrisch weniger komplizierten Fall“ dagegen negativ beantwortet wird.

Daher vermute ich, daß, falls es überhaupt eine geometrische Bedingung für die positive Beantwortung der Malgrangschen Frage geben sollte, diese wahrscheinlich stark von den bisher gängigen abweichen wird.

Faßt man die Ergebnisse dieses Paragraphen in einem Schema zusammen, so ergibt sich mit den bisherigen Bezeichnungen :

	$\text{DIFF}_0^k(X, N)$	$\text{Gr}(\text{DIFF}_0(X, N))$	$\text{DIFF}_0(X, N)$
$(M_1, 0) \approx (M_2, 0) ; N = \infty, \omega, \omega^*$	endlich erzeugt	endlich erzeugt	endlich erzeugt
$(M_1, 0), (M_2, 0)$ scheiden sich in 0 transversal $N = \infty, \omega, \omega^*$	endlich erzeugt	nicht endlich erzeugt	endlich erzeugt
$(M_1, 0), (M_2, 0)$ berühren sich von endlicher Ordnung $N = \infty, \omega, \omega^*$	endlich erzeugt	nicht endlich erzeugt	endlich erzeugt
$(M_1, 0), (M_2, 0)$ berühren sich von unendlicher Ordnung, f erfüllt die Vor. von Bemerkung (5.13)	$x^n f' = g f$	nicht endlich erzeugt	endlich erzeugt
	$P f' = f$ P flach in $0 \in \mathbb{R}$	nicht endlich erzeugt	endlich erzeugt
	$(\text{Tr}(f), 0) = (R, 0)$ o.E. $(\text{Tr}(f), 0) = (\mathbb{R}_0^+, 0)$	nicht endlich erzeugt	endlich erzeugt
	$\forall P, P$ flach in $0, \exists Q, Q$ flach in 0 , so daß $P f' = Q f$ ist !	nicht endlich erzeugt	nicht endlich erzeugt

§ 6 Einige Aspekte zur Lösung von Differentialoperatorgleichungen

Da wir in diesem Paragraphen nur Anregungen für die weitere Beschäftigung mit Differentialoperatoren auf differenzierbaren Räumen geben wollen, werden wir hier nur den Fall

(a) $N = \infty$

(b) $X \subset \mathbb{R}^n$, versehen mit der reduzierten ∞ -differenzierbaren Raumstruktur,

behandeln. Ähnliche Aussagen gelten natürlich auch lokal für die übrigen, hier nicht betrachteten Fälle.

Endziel der Betrachtung von Differentialoperatoren auf X soll neben der Klassifizierung der Singularitäten von X zweifellos die Aufgabe sein, die Differentialoperatorgleichung

$$\oplus \tilde{D}(\cdot) = \tilde{g}, \quad \tilde{D} \in \text{DIFF}^k(X, \infty), \quad \tilde{g} \in C^\infty(X)$$

zu lösen.

Da jede Lösung von $\oplus$ Einschränkung einer Lösung von $D(\cdot) = g$, wobei D, g geeignete Liftungen von $\tilde{D}, \tilde{g}$ sind, ist, könnte man nun mit Hilfe der Theorie der „partiellen Differentialgleichungen“ auf offenen Mengen versuchen, alle Lösungen zu bestimmen.

Leider wird man aber im Detail bemerken, daß man in dieser Theorie bis auf wenige Ausnahmen (siehe [6]) vom Aspekt der Betrachtung von Differentialoperatorgleichungen auf differenzierbaren Räumen sich mit den „falschen“ partiellen Differentialgleichungen beschäftigt, da, wie wir bald sehen werden, schon bei sehr einfachen algebraischen Mengen die Liftungen von Differentialoperatoren auf X sehr oft von wechselndem Typ sind. Da diese sehr schwer zu behandeln sind, wie zum Beispiel das Newman-Tricomi-Problem zeigt, wird es noch sehr großer Anstrengungen bedürfen, das oben angekündigte Endziel zu erreichen.

Ferner werden wir in diesem Paragraphen noch den Begriff des adjungierten Differentialoperators $\tilde{D}^*$ zu $\tilde{D}$ auf X einführen.

Für diesen werden wir zeigen, daß zwar nicht zu jedem $\tilde{D}$ auf X eine Ad-

junktion existiert, aber im Falle der Existenz die schon bekannte Aussage, daß $\tilde{D}^*$, $\tilde{D}$ den gleichen Typ haben, auch in diesem Fall richtig ist.

Dabei wollen wir für $U \subset_{\text{offen}} \mathbb{R}^n$ und für einen ∞ -DO $D : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$ unter der Adjunktion von D denjenigen ∞ -DO $D^* : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$ verstehen, für den

$$\int_U (Df)(x) g(x) dx = \int_U f(x) (D^*g)(x) dx \quad \forall f, g \in C_0^\infty(U)$$

ist (Existenz und Eindeutigkeit siehe [10], [11]).

Wie in [4] definieren wir :

Definition 6.1.: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ und sei

$$\tilde{D} := \overbrace{a_{i_1, \dots, i_n}}^{i_1 + \dots + i_n = m} D^{i_1, \dots, i_n} : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X), \text{ wobei}$$

$a_{i_1, \dots, i_n} \in C^\infty(X)$ ist, ein ∞ -DO der Ordnung m über X .

Dann heißt für festes $x \in X$ die m -Form

$$C_x(y) := \overbrace{a_{i_1, \dots, i_n}(x)}^{i_1 + \dots + i_n = m} \cdot y_1^{i_1} \cdot \dots \cdot y_n^{i_n}, \quad y := (y_1, \dots, y_n),$$

charakteristische Form des Operators $\tilde{D}$ in $x \in X$.

Definition 6.2.: Mit den Bezeichnungen von Definition (6.1) definiert man :

- (a) $\tilde{D}$ heißt elliptisch in $x \in X$, falls $C_x(y) \neq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist.
- (b) $\tilde{D}$ heißt parabolisch (entartet) in $x \in X$, falls es eine affine Transformation $z = A y$ gibt, so daß

$$C_x(z) = C_x(z_1, \dots, \cancel{z_i}, \dots, z_n)$$
eine Abbildung in weniger als n Variablen ist.
- (c) $\tilde{D}$ heißt hyperbolisch oder hyperbolisch entartet in $x \in X$, falls $\tilde{D}$ in $x \in X$ weder elliptisch noch parabolisch ist.

(Je nachdem, zu welchem Zweck man diese Unterscheidung trifft, wird man noch speziellere hyperbolische Typen definieren !)

Beispiel 6.3.: (a) $\tilde{D} : C^\infty(\mathbb{R}^3) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $\tilde{D} := \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ist ein elliptischer ∞ -DO !

(b) $\tilde{D} : C^\infty(\mathbb{R}^3) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $\tilde{D} := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ ist ein hyperbolischer ∞ -DO !

(c) $\tilde{D} : C^\infty(\mathbb{R}^3) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $\tilde{D} := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$ ist ein parabolischer ∞ -DO !

Bei der bisherigen in der Literatur üblichen „klassischen“ Betrachtung von Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten klassifizierte man diese in der Karte. Da dies bei allgemeinen differenzierbaren Räumen so erst einmal nicht möglich ist, bleibt uns im allgemeinen nur die Möglichkeit der Klassifikation der Liftungen von Differentialoperatoren auf X .

Dabei ergibt sich zum Beispiel für Mannigfaltigkeiten, daß man jeden Differentialoperator auf X global-parabolisch liften kann !

Um dies zeigen zu können, benötigen wir die folgenden Bemerkungen :

Bemerkung 6.4.: Sei $X \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^m$ eine 1-dimensionale ∞ -differenzierbare Mannigfaltigkeit, die ohne Einschränkung global durch

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : U &\rightarrow X, & U &\subset_{\text{offen}} \mathbb{R}^1 \\ x &\rightarrow (x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)). \end{aligned}$$

parametrisiert sein soll.

Dann entspricht dem Basisoperator $\frac{\partial}{\partial x_i}$ auf U die Einschränkung des Differentialoperators

$$D_{0,i} := \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^m (\varphi_k)_{x_i} \frac{\partial}{\partial y_k} : C^\infty(U \times \mathbb{R}^m) \rightarrow C^\infty(U \times \mathbb{R}^m)$$

auf X , wobei $U \times \mathbb{R}^m = \{(x_1, \dots, x_1, y_1, \dots, y_m) \mid y_i \in \mathbb{R}, x := (x_1, \dots, x_1) \in U\}$ ist

Beweis: Sei $f \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^m)$ mit $f|_X = 0$ beliebig gewählt .

$$\sim g(x) := f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in U$$

~ $\forall i = 1, \dots, l$ gilt :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)(x) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(x, \varphi(x)) + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial y_k} \right)(x, \varphi(x)) \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \right)(x) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(x, \varphi(x)) + \sum_{k=1}^m (\varphi_k)_{x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial y_k} \right)(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in U \end{aligned}$$

~ $\forall i = 1, \dots, l$ gilt :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^m (\varphi_k)_{x_i} \frac{\partial f}{\partial y_k} \right] \Big|_X = 0$$

~ $\forall i = 1, \dots, l$ ist $D_{0,i}$ Liftung eines ∞ -DO auf X !

~ Daraus folgt dann die Behauptung !

□

Bemerkung 6.5.: Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von Bemerkung (6.4) gilt dann :

$\tilde{D} : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$ sei ein linearer ∞ -DO der Ordnung k über X

~ Der von $\tilde{D}$ induzierte ∞ -DO $\tilde{D}_U$ auf U hat die Form

$$\tilde{D}_U := \sum_{i_1 + \dots + i_l \leq k} a_{i_1, \dots, i_l} \cdot D^{i_1, \dots, i_l}$$

~ Definiert man $\forall (x, y) \in U \times \mathbb{R}^m$ $A_{i_1, \dots, i_l}(x, y) := a_{i_1, \dots, i_l}(x)$, so ist:

(1) $D := \sum_{i_1 + \dots + i_l \leq k} A_{i_1, \dots, i_l} (D_{0,1})^{i_1} \dots (D_{0,l})^{i_l}$ ein ∞ -DO auf $U \times \mathbb{R}^m$, der eine Liftung von $\tilde{D}$ ist .

(2) D für alle $(x, y) \in U \times \mathbb{R}^m$ parabolisch !

Beweis: Sei $(x, y) \in U \times \mathbb{R}^m$ beliebig gewählt .

~ Die charakteristische Form von D in (x, y) ist dann

$$C_{(x,y)}(z_1, \dots, z_{l+m}) = \sum_{i_1 + \dots + i_l = k} A_{i_1, \dots, i_l} \prod_{s=1}^l (z_s + \sum_{k=1}^m (\varphi_k)_{x_s} \cdot z_{l+k})^{i_s}$$

~ Mit der affinen Transformation

$$\begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \vdots \\ \tilde{z}_1 \\ \vdots \\ \tilde{z}_{l+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & (\varphi_1)_{x_1}(x) & \dots & (\varphi_m)_{x_1}(x) \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & (\varphi_1)_{x_1}(x) & \dots & (\varphi_m)_{x_1}(x) \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ z_{l+m} \end{bmatrix}$$

gilt dann :

$$C_{(x,y)}(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_{l+m}) = \sum_{i_1 + \dots + i_{l+m} = k} A_{i_1, \dots, i_{l+m}}(x,y) (\tilde{z}_1)^{i_1} \dots (\tilde{z}_{l+m})^{i_{l+m}}$$

~ Mit Definition (6.2)(b) folgt dann die Behauptung !

□

Diese Eigenschaft ist allerdings bei beliebigen ∞ -differenzierbaren Räumen nicht immer erfüllt, obwohl Liftungen von Differentialoperatoren über X in den Punkten von X durchaus parabolisch sein können.

Bemerkung 6.6.: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ ein eckenarmer Raum, für den gilt:

Ist $x \in X$ ein Mannigfaltigkeitspunkt, so ist $\dim_x X \leq n-1$.

Dann ist jeder ∞ -DO $\tilde{D} : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$ in allen Punkten $x \in X$ parabolisch !

Beweis: Die Behauptung folgt sofort aus der Tatsache, daß die Menge $\{x \in X \mid \tilde{D} \text{ ist in } x \in X \text{ parabolisch}\}$ abgeschlossen in X ist.

□

Korollar 6.7.: Sei $X_{p,q} \in \mathbb{R}^2$, p, q teilerfremd, die im vierten Paragraphen definierte Menge und sei

$\tilde{D} : C^\infty(X_{p,q}) \rightarrow C^\infty(X_{p,q})$ ein ∞ -DO der Ordnung k über $X_{p,q}$.

Dann ist $\tilde{D}$ für alle $(x,y) \in X_{p,q}$ parabolisch !

Beispiel 6.8.: Sei $X_{3,2} \subset \mathbb{R}^2$ wie üblich definiert. Dann gilt :

$$(a) D_1 := 4x D^{2,0} + 12y D^{1,1} + 9x^2 D^{0,2} - 2 D^{1,0} : C^\infty(\mathbb{R}^2) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

ist als Liftung eines ∞ -DO über $X_{3,2}$

parabolisch auf $X_{3,2}$,

hyperbolisch auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 > x^3\}$ und

elliptisch auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 < x^3\}$.

$$(b) D_2 := 4y D^{2,0} + 12x^2 D^{1,1} + 9xy D^{0,2} + 3x D^{0,1} : C^\infty(\mathbb{R}^2) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

ist als Liftung eines ∞ -DO über $X_{3,2}$

parabolisch auf $X_{3,2}$,

hyperbolisch auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 < x^3\}$ und

elliptisch auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 > x^3, x > 0\}$.

Bemerkung 6.9.: Mit den Bezeichnungen von Beispiel (6.8) gilt:

Es gibt keine Liftung von $\tilde{D}_1$ (der von D_1 auf $X_{3,2}$ induzierte ∞ -DO) zweiter Ordnung, die global parabolisch ist !

Beweis: Jede Liftung von $\tilde{D}_1$ zweiter Ordnung hat die Form

$$\begin{aligned} & (4x + (y^2 - x^3)f_1) D^{2,0} + (12y + (y^2 - x^3)f_2) D^{1,1} \\ & + (9x^2 + (y^2 - x^3)f_3) D^{0,2} - (2 + (y^2 - x^3)f_4) D^{1,0} + (y^2 - x^3)f_5 D^{0,1} \\ & + (y^2 - x^3)f_6 \quad , \end{aligned}$$

wobei $f_1, \dots, f_6$ in einer offenen Umgebung von $X_{3,2}$ definierte C^∞ -Funktionen sind.

Die Behauptung folgt dann durch triviales Nachrechnen !

□

Betrachtet man die im Beispiel (6.8) aufgeführten Differentialoperatoren genauer, so haben diese eine ähnliche Form, wie die partielle Differentialgleichung, die beim Newman-Tricomi-Problem auftaucht. Der Unterschied besteht allerdings darin, daß die parabolische „Trennungslinie“ in unserem Fall leider nicht die x-Achse, also eine Mannigfaltigkeit, sondern die Neillsche Parabel ist, so daß man erhebliche Schwierigkeiten haben dürfte, Lösungen von Differentialoperatorgleichungen zu finden.

Im folgenden werden wir den Begriff des adjungierten Differentialoperators auf differenzierbaren Räumen definieren.

Da wir in dieser Arbeit immer versucht haben, durch Liftung des jeweiligen Operators auf X die gewünschten Eigenschaften nachzuweisen, wollen wir auch bei dieser Definition dieser „Philosophie“ treu bleiben.

Definition 6.10.: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ und sei $\tilde{D} : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$ ein ∞ -D0 k-ter Ordnung über X .

Dann heißt ein ∞ -D0

$$\tilde{D}^* : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$$

adjungierter Differentialoperator oder Adjunktion von $\tilde{D}$ über X , falls es eine Menge $U \subset_{\text{offen}} \mathbb{R}^n$ mit $X \subset U$ und zueinander adjungierte ∞ -D0 $D, D^* : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$ k-ter Ordnung über U gibt, die Liftungen von $\tilde{D}$ bzw. $\tilde{D}^*$ darstellen.

Im folgenden werden wir anhand von Beispielen sehen, daß nicht zu jedem Differentialoperator auf X ein adjungierter existieren muß, und daß im Falle der Existenz dieser nicht unbedingt eindeutig sein muß.

Beginnen wir mit der Eindeutigkeit.

Beispiel 6.11.: Sei $X_{3,2}$ wie üblich definiert und sei

$$\tilde{D} := 4y^2 D^{2,0} + 12x^2 y D^{1,1} + 9x^4 D^{0,2} + 6x^2 D^{1,0} + 12xy D^{0,1}$$

der hier zu betrachtende Differentialoperator über $X_{3,2}$.

Dann sind

$$(1) D_1 : C^\infty(\mathbb{R}^2) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2) \quad \text{mit} \\ D_1 := 4y^2 D^{2,0} + 12x^2 y D^{1,1} + 9x^4 D^{0,2} + 6x^2 D^{1,0} + 12xy D^{0,1}$$

$$(2) D_2 : C^\infty(\mathbb{R}^2) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2) \quad \text{mit} \\ D_2 := (5y^2 - x^3) D^{2,0} + 12x^2 y D^{1,1} + \left(\frac{45}{4}x^4 - \frac{9}{4}xy^2\right) D^{0,2} - 6x^2 D^{1,0} \\ + 12xy D^{0,1}$$

Liftungen von $\tilde{D}$ über $\mathbb{R}^2$.

Bildet man nun die adjungierten Differentialoperatoren zu D_1 und D_2 , so ergibt sich:

$$(1) D_1^* = D_1$$

$$(2) D_2^* = D_1 + (y^2 - x^3)(D^{2,0} - \frac{9}{4}x D^{0,2}) - 3x(2x D^{1,0} + 3y D^{0,1}) - \frac{21}{2}x$$

$\sim D_1^*$ und D_2^* sind Differentialoperatoren, die auf $X_{3,2}$ einschränkbar sind.

$\sim$ Da $D_1^*(1) = 0 \neq -\frac{21}{2}x = D_2^*(1)$ ist, folgt nun:

(a) $\tilde{D}_1^*$ und $\tilde{D}_2^*$ (Die Einschränkung von D_1^* und D_2^* auf $X_{3,2}$) sind adjungierte Differentialoperatoren von $\tilde{D}$.

$$(b) \tilde{D}_1^* \neq \tilde{D}_2^*$$

□

Wenn auch der adjungierte Differentialoperator im Falle seiner Existenz nicht eindeutig bestimmt ist, so haben doch, wie der folgende Satz zeigt, alle Adjungierten den gleichen Typ.

Satz 6.12.: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ und sei $\tilde{D} : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$

ein adjungierbarer ∞ -DO der Ordnung k über X .

Dann gilt:

$$\text{Sind } \tilde{D}_1^* := \sum_{|\alpha| \leq k} \tilde{a}_\alpha \cdot D^\alpha : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X) \text{ , wobei } \tilde{a}_\alpha \in C^\infty(X) \text{ ist,}$$

$$\text{und } \tilde{D}_2^* := \sum_{|\alpha| \leq k} \tilde{b}_\alpha \cdot D^\alpha : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X) \text{ , wobei } \tilde{b}_\alpha \in C^\infty(X) \text{ ist,}$$

beliebige zu $\tilde{D}$ adjungierte Differentialoperatoren, so ist

$$\tilde{a}_\alpha = \tilde{b}_\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } |\alpha| = k$$

Beweis: Nach Definition der Adjunktion existiert eine Menge $U \subset \text{offen } \mathbb{R}^n$ mit $X \subset U$ und Liftungen

$$D_1 := \sum_{|\alpha| \leq k} A_\alpha \cdot D^\alpha : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U) \text{ bzw.}$$

$$D_2 := \sum_{|\alpha| \leq k} (A_\alpha + H_\alpha) \cdot D^\alpha : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U) \text{ , wobei } H_\alpha|_X = 0 \text{ ist ,}$$

von $\tilde{D}$, so daß die Einschränkung der Adjungierten von D_1 bzw. D_2 auf X genau den Differentialoperatoren $\tilde{D}_1^*$ und $\tilde{D}_2^*$ entspricht.

Da zum Beispiel nach der zweiten Behauptung von Satz (4.8) in [10] für beliebige $f \in C^\infty(U)$ gilt, daß

$$D_1^*(f) = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(A_\alpha f) \quad \text{und}$$

$$D_2^*(f) = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(A_\alpha f + h_\alpha f)$$

ist, folgt für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = k$:

$$(1) \tilde{a}_\alpha \equiv ((-1)^k A_\alpha)|_X$$

$$(2) \tilde{b}_\alpha \equiv ((-1)^k (A_\alpha + h_\alpha))|_X$$

~ Da $h_\alpha|_X \equiv 0$ ist, folgt die Behauptung .

□

Im folgenden wenden wir uns Existenzuntersuchungen zu und zeigen zuerst an einem Beispiel, daß nicht zu jedem Differentialoperator auf einem differenzierbaren Raum eine Adjunktion existiert.

Beispiel 6.13.: Sei $X_{3,2}$ wie üblich definiert und sei

$$\tilde{D} := 4x D^{2,0} + 12y D^{1,1} + 9x^2 D^{0,2} - 2 D^{1,0} : C^\infty(X_{3,2}) \rightarrow C^\infty(X_{3,2})$$

der hier zu betrachtende Differentialoperator zweiter Ordnung über $X_{3,2}$.

~ Eine beliebige Liftung $D : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$ zweiter Ordnung von $\tilde{D}$ hat die Form

$$\begin{aligned} D := & (4x + (y^2 - x^3)h_1) D^{2,0} + (12y + (y^2 - x^3)h_2) D^{1,1} \\ & + (9x^2 + (y^2 - x^3)h_3) D^{0,2} + (-2 + (y^2 - x^3)h_4) D^{1,0} \\ & + (y^2 - x^3)h_5 D^{0,1} + (y^2 - x^3)h_6 \end{aligned}$$

wobei $X_{3,2} \subset U \subset \text{offen } \mathbb{R}^2$ und $h_i \in C^\infty(U)$ für $i = 1, \dots, 6$ ist.

~ Dann gilt für $f \in C^\infty(U)$ beliebig :

$$\begin{aligned} D^*(f) = & D^{2,0}[(4x + (y^2 - x^3)h_1) f] + D^{1,1}[(12y + (y^2 - x^3)h_2) f] \\ & + D^{0,2}[(9x^2 + (y^2 - x^3)h_3) f] - D^{1,0}[(-2 + (y^2 - x^3)h_4) f] \\ & - D^{0,1}[(y^2 - x^3)h_5 f] + h_6 f \\ = & D(f) + [20 + (y^2 - x^3)(2(h_1)_x + (h_2)_y) - 6x^2 h_1 + 2y h_2](D^{1,0}f) \\ & + [(y^2 - x^3)((h_2)_x + 2(h_3)_y) - 3x^2 h_2 + 4y h_3](D^{0,1}f) \\ & + g f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{wobei } g := & (y^2 - x^3)((h_1)_{xx} + (h_2)_{xy} + (h_3)_{yy} - (h_4)_x - (h_5)_y) \\ & - 6x^2(h_1)_x - 6xh_1 - 3x^2(h_2)_y + 2y(h_2)_x + 4y(h_3)_y + 2h_3 \\ & + 3x^2h_4 - 2yh_5 \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

~ Da für jede Wahl von $h_1, \dots, h_6$ der Differentialoperator $D^*(f)$ sich nicht auf $X_{3,2}$ einschränken läßt, folgt :

$\tilde{D}$ ist nicht adjungierbar !

□

Nach diesem Beispiel stellt sich natürlich die Frage, wann und welche Differentialoperatoren überhaupt liftbar sind. Eine Teilantwort darauf gibt die folgende

Bemerkung 6.14.: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ und $\tilde{D} \in \text{DIFF}^1(X, \infty)$ beliebig.

Dann gilt:

$\tilde{D}$ ist adjungierbar !

Beweis: Da $\tilde{D} \in \text{DIFF}^1(X, \infty)$ ist, existieren $a_i \in C^\infty(X)$ für $i = 0, \dots, n$

so daß

$$\tilde{D} := a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{ist.}$$

~ $\exists$ Liftung $D : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$ der Ordnung 1 über $U \subset_{\text{offen}} \mathbb{R}^n$, $X \subset U$, von $\tilde{D}$ der Form

$$D := A_0 + \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

wobei die $A_i \in C^\infty(U)$ Repräsentanten der a_i für $i = 0, \dots, n$ sind .

~ Für $f \in C^\infty(U)$ beliebig gilt dann :

$$\begin{aligned} D^*(f) &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i f) + A_0 f = - \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + (A_0 - \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_i}{\partial x_i}) f \\ &= - D(f) + (2A_0 - \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_i}{\partial x_i}) f \end{aligned}$$

~ Da D^* sich auf X einschränken läßt, also Liftung eines Differentialoperators über X ist, folgt :

$\tilde{D}$ ist adjungierbar !

□

Bemerkung 6.15.: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ und seien $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2 : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$ lineare adjungierbare Differentialoperatoren über X .

Dann gilt :

- (a) $\tilde{D}_1 + \tilde{D}_2$ ist adjungierbar, und man findet Adjunktionen von $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2$ und $\tilde{D}_1 + \tilde{D}_2$, so daß $(\tilde{D}_1 + \tilde{D}_2)^* = \tilde{D}_1^* + \tilde{D}_2^*$ ist.
- (b) $\tilde{D}_1 \circ \tilde{D}_2$ ist adjungierbar und man findet Adjunktionen von $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2$ und $\tilde{D}_1 \circ \tilde{D}_2$, so daß $(\tilde{D}_1 \circ \tilde{D}_2)^* = \tilde{D}_2^* \circ \tilde{D}_1^*$ ist.

Beweis: Die Behauptungen folgen sofort aus den Adjunktionsregeln für offene Mengen des $\mathbb{R}^n$! □

Bemerkung 6.16.: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ und sei $T_A(X)$ der Ring derjenigen Differentialoperatoren über X , der von $\text{DIFF}^1(X, \infty)$ über $\mathbb{R}$ erzeugt werden.

Dann gilt für alle $\tilde{D} \in T_A(X)$:

$\tilde{D}$ ist adjungierbar !

Beweis: folgt sofort aus den Bemerkungen (6.14) und (6.15) □

Korollar 6.17.: Es gilt:

- (a) Ist $X \subset_{\text{offen}} \mathbb{R}^n$, so ist jeder Differentialoperator über X adjungierbar !
- (b) Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ eine ∞ -differenzierbare Mannigfaltigkeit, so ist jeder Differentialoperator über X adjungierbar !

Beweis: folgt sofort aus Bemerkung (6.16), da $T_A(X) = \text{DIFF}(X, \infty)$ für die unter (a) und (b) aufgeführten Spezialfälle ist . □

Damit haben wir eine große Klasse von adjungierbaren Differentialoperatoren kennengelernt, die in den in Korollar (6.17) aufgeführten klassischen Fällen die schon bekannten Ergebnisse liefern.

Leider ist die Vermutung, daß es keine als die in Bemerkung (6.16) aufgeführten adjungierten Differentialoperatoren gibt, noch ein offenes Problem.

Da der Begriff des selbstadjungierten Differentialoperators in der Funktionalanalysis eine große Rolle spielt, wollen wir hier auch diese Definition auf differenzierbare Räume in kanonische Weise übertragen.

Definition 6.18.: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ und sei $\tilde{D} : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$ ein adjungierbarer Differentialoperator über X .

Existiert eine Adjunktion $\tilde{D}^* : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$ von $\tilde{D}$, so daß $\tilde{D}^* = \tilde{D}$ ist, so heißt $\tilde{D}$ selbstadjungiert.

Beispiel 6.19.: Sei $X_{3,2}$ in der üblichen Weise definiert und

$\tilde{D} := 2y D^{1,0} + 3x^2 D^{0,1} : C^\infty(X_{3,2}) \rightarrow C^\infty(X_{3,2})$ der hier zu betrachtende Differentialoperator.

$$\sim \tilde{D}_2 := \tilde{D} \circ \tilde{D} = 4y^2 D^{2,0} + 12x^2 y D^{1,1} + 9x^4 D^{0,2} + 6x^2 D^{1,0} + 12xy D^{0,1}$$

ist nach Bemerkung (6.15)(b) ein adjungierbarer ∞ -DO über $X_{3,2}$!

$\sim$ Ist $D_2 : C^\infty(\mathbb{R}^2) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2)$ die kanonische Liftung von $\tilde{D}_2$, so gilt:

$$D_2^* = 4y^2 D^{2,0} + 12x^2 y D^{1,1} + 12x^2 D^{1,0} + 24xy D^{0,1} + 24x + 9x^4 D^{0,2} \\ - 6x^2 D^{1,0} - 12x - 12xy D^{0,1} - 12x$$

$$\equiv D_2$$

$\sim \tilde{D}_2$ ist selbstadjungiert!

□

Zum Schluß dieses Paragraphen wollen wir den Typ von Differentialoperatoren und deren Adjungierten miteinander vergleichen. Wie im „klassischen“ Fall ergibt sich

Satz 6.20.: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ und sei $\tilde{D} : C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$ ein adjungierbarer Differentialoperator über X .

Dann gilt:

- (a) $\tilde{D}$ ist in $x \in X$ elliptisch $\iff \tilde{D}^*$ ist in $x \in X$ elliptisch
- (b) $\tilde{D}$ ist in $x \in X$ hyperbolisch $\iff \tilde{D}^*$ ist in $x \in X$ hyperbolisch
- (c) $\tilde{D}$ ist in $x \in X$ parabolisch $\iff \tilde{D}^*$ ist in $x \in X$ parabolisch

Beweis: Der Beweis der Behauptung ergibt sich sofort aus der Tatsache, daß sich die Koeffizienten der „höchsten Ableitungen“ von $\tilde{D}$ und $\tilde{D}^*$ sich höchstens um ein Vorzeichen unterscheiden (siehe Beweis zu Satz (6.12)).

□

Ich möchte diesen Paragraphen nicht beenden, ohne auf eine Möglichkeit aufmerksam gemacht zu haben, mit der man eventuell die Lösungen von Differentialoperatorproblemen zum Beispiel auf der Neillschen Parabel berechnen kann.

Benutzt man nämlich die Idee von Vigüé in [19], mit der er nachweisen konnte, daß $\text{DIFF}_X(X, \omega^*)$ endlich erzeugt ist im Falle eindimensionaler irreduzibler komplexer Räume, so kann man jedem Differentialoperator auf der Neillschen Parabel einen mit meromorphen Koeffizienten auf $\mathbb{C}$ zuordnen. Sollte man diesen lösen können, so könnte man durch Vergleich eventuell auch Aussagen über die Lösbarkeit der Liftungen von Differentialoperatoren auf der Neillschen Parabel erhalten, also über hochgradig nicht triviale Partielle Differentialgleichungen von im allgemeinen gemischten Typ. Dies wären dann sicherlich auch Ergebnisse, die die „Spezialisten“ im Bereich der Partiellen DGL interessieren dürfte.

Anhang :

Ich möchte an dieser Stelle noch eine kurze Bemerkung zu einer Verallgemeinerung der Aussage von Vigué in [19] machen, bei der er ja, wie schon erwähnt, die Malgrangsche Frage positiv für den Fall von eindimensionalen irreduziblen komplexanalytischen Kurven beantwortet.

Es gilt nämlich :

Bemerkung : Es sei $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, (0, \dots, 0))$
 $t \rightarrow (f_1(t), \dots, f_n(t))$

eine reellanalytische Parameterkurve, wobei

$$f_i(t) := \sum_{s=k_i}^{\infty} a_s^i t^s, \quad a_s^i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n \quad \text{sein soll.}$$

Ist zusätzlich $ggT(k_1, \dots, k_n) = 1$ und versieht man $(f(\mathbb{R}), 0)$ mit der reduzierten ω -differenzierbaren Raumstruktur, so ist

$DIFF_{(0, \dots, 0)}(f(\mathbb{R}), \omega)$ endlich erzeugt !!

Beweis: Sei $f^* : C^{\omega}(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow C^{\omega}(\mathbb{R}, 0)$
 $g \rightarrow g \circ f$

und $A := f^*(C^{\omega}(\mathbb{R}^n, 0))$.

Da $ggT(k_1, \dots, k_n) = 1$ ist, kann man zeigen :

$\exists N_0 \in \mathbb{N}$, so daß $t^n \in A \quad \forall n \geq N_0$ ist !

Nun kann man den Beweis von Vigué wörtlich übernehmen, woraus sich dann die Behauptung ergibt.

□

Läßt man in der obigen Bemerkung beliebige reellanalytische Parameterkurven zu, so ergeben sich auch semianalytische Mengen $(f(\mathbb{R}), 0)$.

Für diesen Fall und beliebige eindimensionale ∞ -differenzierbare Parameterkurven, ist das Problem, ob die Malgrangsche Frage immer positiv beantwortet werden kann, noch offen.

Literaturverzeichnis

- (1) Bernstein, I.N.; Gelfaud, I.M.; Gelfaud, S.I. : Differential Operators on a cubic cone ;
Ouspeki mat. nauk. 163, 185-190 (1972)
- (2) Bloom, T. : Differential operators on curves ;
Rice University Studies (1972)
- (3) Bröcker, T.; Jänich, K. : Einführung in die Differentialtopologie ;
Berlin (1973)
- (4) Courant, R.; Hilbert, D. : Mathematische Physik II ;
Berlin (1968)
- (5) Grothendieck, A. : Eléments de Géometrie Algébrique ;
Publ. Math. de I.H.E.S. (1967)
- (6) Hellwig, G. : Anfangs- und Randwertprobleme bei partiellen
DGL von wechselndem Typ ;
Math. Zeitschrift; Bd. 58; S. 337-357 (1953)
- (7) Kantor, J.-M. : Formes et Opérateurs différentiels sur les
escapes analytiques complexes ;
Bull. Soc. math. France, Mem. 53 (1977)
- (8) Malgrange, B. : Analytic Spaces;
Monogr. 17 de L'enseignement Math. (1968)
- (9) Malgrange, B. : Ideals of differentiable functions ;
Oxford University Press (1966)
- (10) Meier, K.P. : Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten ;
Diplomarbeit Bochum (1982)
- (11) Narasimhan, R. : Analysis on real and complex Manifolds ;
North-Holland Publ. Comp. (1973)
- (12) Narasimhan, R. : Introduction to the theory of analytic spaces ;
Berlin (1966)
- (13) Peetre, J. : Rectifications à l'article „Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels“ ;
Math. Scandinavica 8, 116-120 (1960)

- (14) Reichard, K.; Spallek, K.-H. : Differenzierbare Geometrie (Scriptum);
Bochum, Reprint (1978)
- (15) Spallek, K.-H. : Differenzierbare Räume ;
Math. Ann. 180, 269-296 (1969)
- (16) Spallek, K.-H. : Differenzierbare Gruppen und Whitney-
Räume;
Bochum, Reprint (1974)
- (17) Spallek, K.-H. : Zum Satz von Osgood und Hartogs für
analytische Moduln I;
Math. Annalen 178 (1968)
- (18) Tougeron, J.C. : Idéaux de fonctions différentiables ;
Berlin (1972)
- (19) Vigüé, J.-P. : Opérateurs différentiels sur les esca-
pes analytiques ;
Inv. math. 20, 313-336 (1973)
- (20) Vigüé, J.-P. : Opérateurs différentiels sur des cônes
normaux de dimension 2 ;
Bull. Soc. math. France 103, 113-128
(1975)

Lebenslauf

8. August 1957	geboren in Keurode/Schlesien als Sohn des Ehepaares Johanna und Herbert Meier
April 1964 - Juni 1967	Besuch der Canisius Volksschule in Gelsenkirchen-Bismarck
Juli 1967 - Juni 1976	Besuch des Carl-Friedrich-Gauß-Gymnasiums in Gelsenkirchen
14. Juni 1976	Abitur
Juli 1976 - September 1977	Grundwehrdienst bei der Bundeswehr in München, Coesfeld und Dülmen
Oktober 1977	Beginn des Studiums der Mathematik und der Wirtschaftswissenschaften in Bochum
28. Februar 1979	Vordiplom in Mathematik mit Nebenfach Wirtschaftswissenschaften
April 1979 - Februar 1982	Studentische Hilfskraft
26. Februar 1982	Diplomprüfung in Mathematik mit Nebenfach Wirtschaftswissenschaften und einer Diplomarbeit über „Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten“
	Prüfer: Prof. Dr. Spallek, Prof. Dr. Ehlich, Prof. Dr. Wassermann, Prof. Dr. Chmielewicz
ab März 1982	wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl von Prof. Dr. Spallek

